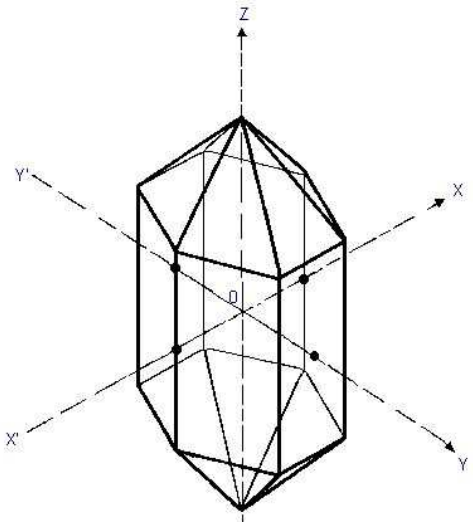
Les structures algébriques

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

10 mai 2017



Dans ce cours, nous présentons les structures que vérifient les principaux ensembles utilisés en mathématiques.

1 Loi de composition interne

DÉFINITION 1 : **Loi de composition interne**
Soit E un ensemble. On appelle *loi de composition interne* une application de $E \times E$ dans E :

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & E \times E & \longrightarrow & E \\ & & (a,\ b) & \mapsto & \phi(a,\ b) \end{array}$$

Pour simplifier les notations, on pourra par exemple noter : $\phi(a,\ b) = a \star b$
L'ensemble E muni de la lci $\star$ est noté $(E, \star)$: on dit alors que c'est un *magma*.

Remarque 1.

1. Soient a et b deux éléments de E.
   Il n'y a aucune raison pour que $\phi(a,\ b) = \phi(b,\ a)$, c'est à dire que $a \star b = b \star a$.
2. On peut itérer une lci : si $(a,\ b,\ c) \in E^3$. On notera : $\begin{cases} \phi\big(\phi(a,\ b),\ c\big) = (a \star b) \star c \\ \phi\big(a,\ \phi(b,\ c)\big) = a \star (b \star c) \end{cases}$
   Il n'y a a priori aucune raison pour $(a \star b) \star c = a \star (b \star c)$.

⚠⚠⚠. Au lieu de $\star$, la lci sera souvent notée "+", "$\times$" ou ".".
Mais attention : ces notations n'auront souvent rien à voir avec l'addition et la multiplication dans $\mathbb{R}$.
On réservera en général la notation "+" lorsque la lci sera commutative.

`Exemple 1.`

1.	Sur $\mathbb{N}$,		la multiplication et l'addition des entiers	sont des lci.
2.	Sur $E = \mathcal{F}(G,G)$	(où G est un ensemble),	la composition des applications	est une lci.
3.	Sur $\mathcal{P}(G)$	(où G est un ensemble),	l'union et l'intersection	sont des lci.
4.	Sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$,		la multiplication et l'addition	sont des lci.
5.	Sur $\mathbb{R}^3$,		le produit vectoriel	est une lci.

DÉFINITION 2 : **Propriétés possibles d'une lci**
Soit $\star$ une lci sur un ensemble E.

On dit que $\star$ est : $\begin{cases} \textit{commutative} & \text{lorsque} \quad \forall (a,\ b) \in E^2, & a \star b = b \star a \\ \textit{associative} & \text{lorsque} \quad \forall (a,\ b,\ c) \in E^3, & a \star (b \star c) = (a \star b) \star c \end{cases}$

Remarque 2. Le produit vectoriel de $\mathbb{R}^3$ n'est ni commutatif, ni associatif.

DÉFINITION 3 : Si une lci est *associative*, on peut définir les notations suivantes :

1) Lorsque la loi est notée additivement, on définit $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i = x_1 + \cdots + x_n$

2) Lorsque la loi est notée multiplicativement, on définit $\displaystyle\prod_{i=1}^{n} x_i = x_1 \times \cdots \times x_n$

DÉFINITION 4 : **Elément Neutre**
Un élément $e \in E$ est dit *neutre* ssi $\boxed{\forall x \in E, \quad e \star x = x \star e = x}$

1. Si la loi est noté "+" alors l'élément neutre de E sera noté 0_E (ou 0 s'il n'y a pas d'ambiguité).
2. Si la loi est noté "$\times$" alors l'élément neutre de E sera noté 1_E (ou 1 s'il n'y a pas d'ambiguité).

Pour mq $\star$ est commutative :	1. Soit $(x,\ y,\ z) \in E^3$	1. Soit $x \in E$
1. Soit $(x,\ y) \in E^2$	2. Mq : $x \star (y \star z) = (x \star y) \star z$	2. Mq : $e \star x = x$ et $x \star e = x$
2. Mq : $x \star y = y \star x$ ...	...	...
3. Donc $\star$ est commutative	3. Donc $\star$ est associative	3. Donc e est neutre.
Pour mq $\star$ est associative :	Pour mq $e \in E$ est neutre :	

Remarque 3.

1. Pour deviner la forme de l'élément neutre, on pourra procéder à une analyse.
2. Si la loi est commutative, il suffit de prouver que $\forall x \in G,\ x \star e = x$ pour prouver que e est élément neutre.

`Exemple 2.`

1.	$(\mathbb{N},\ +)$:	$+$ est une lci commutative et associative,	0 est l'unique élément neutre
2.	$(\mathbb{N},\ \times)$:	$\times$ est une lci commutative et associative,	1 est l'unique élément neutre
3.	$(\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R}),\ \circ)$:	$\circ$ est une lci associative mais pas commutative,	l'application $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ est un élément neutre
4.	$(\mathcal{P}(G),\ \cup)$:	$\cup$ est une lci commutative, associative,	la partie $\emptyset$ est neutre pour cette loi.
5.	$(\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R}),\ +)$:	$+$ est une lci commutative, associative	la matrice nulle est élément neutre.
6.	$(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ \times)$:	$\times$ est une lci associative mais non commutative	la matrice I_n est élément neutre.

Exercice : 1
$(*)$ Soit $\mathbb{R}^2$ muni de la loi $\star$ définie par $(x,\ y) \star (x',\ y') = (xx' - yy',\ xy' + yx')$.
Montrer que $\star$ est une lci, commutative, associative et admettant un élément neutre à déterminer.

THÉORÈME 1 : **Unicité de l'élément neutre**
Si $(E,\ \star)$ possède un élément neutre, il est unique.

Preuve 1 : On considère e et e' deux éléments neutres et on montre facilement qu'ils sont identiques.

DÉFINITION 5 : **Monoïde**
Un ensemble $(E, \star)$ muni d'une lci associative et admettant un élément neutre est appelé un monoïde.

`Exemple 3.` $(\mathbb{N}, +)$ est un monoïde d'élément neutre 0.

`Exemple 4.` On considère un ensemble fini A appelé *alphabet*, et on définit un *mot* sur A comme étant une suite finie de *lettres* de A. On notera $m = a_1 \dots a_n$ un tel mot. On définit également le mot vide ε. Sur l'ensemble $A^\star$ des mots de A, on définit une lci appelée la *concaténation* de deux mots de la façon suivante : si $m_1 = a_1 \dots a_n$ et si $m_2 = b_1 \dots b_p$, on note $m_1.m_2 = a_1 \dots a_n b_1 \dots b_p$. Alors l'ensemble des mots muni de la concaténation, $(A^\star, .)$ admet pour élément neutre le mot vide ε. La lci étant associative, cet ensemble muni de cette lci est un monoïde très utilisé en informatique théorique et en théorie des langages.

DÉFINITION 6 : **Inverse**
On suppose que $(E, \star)$ possède un élément neutre e. Soit un élément $x \in E$.

On dit qu'un élément $y \in E$ est un *inverse* de l'élément x ssi : $x \star y = y \star x = e$
Dans ce cas, on dit aussi que x est *inversible*.

Remarque 4. Impossible de s'intéresser aux inverses des éléments de $(E, \star)$ si l'on n'a pas prouvé auparavant l'existence d'un élément neutre.

Remarque 5.

1. Si la loi est notée "+" alors l'inverse de x (alors appelé l'*opposé)* est noté $-x$
2. Si la loi est notée "." ou "$\times$" ou "$\star$" alors l'inverse de x est noté x^{-1}

`Exemple 5.`

1. Dans $(\mathbb{Z}, +)$ tous les éléments admettent un inverse, en revanche, dans $(\mathbb{N}, +)$ seul 0 admet un inverse.
2. Dans $(\mathbb{Q}, \times)$, $(\mathbb{R}, \times)$ et $(\mathbb{C}, \times)$ tous les éléments non nuls admettent un inverse.
3. Dans $(\mathbb{Z}, \times)$ seuls 1 et -1 admettent un inverse.
4. Dans $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}), \times)$ seuls les matrices inversibles admettent un inverse.

`Exemple 6.` Déterminer les éléments des ensembles suivants admettant un inverse.

1. $(P(E), \cap)$ 2. $(P(E), \cup)$ 3. $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, +)$ 4. $(\mathbb{R}^\mathbb{N}, \times)$ 5. $(\mathbb{R}^\mathbb{R}, o)$ 6. $(\mathbb{R}^\mathbb{R}, \times)$ 7. $(\mathbb{R}^\mathbb{R}, +)$

THÉORÈME 2 : **Unicité de l'inverse**
Dans un monoïde $(E, \star)$, si un élément $x \in E$ possède un inverse, cet inverse est unique.

Preuve 2 : Très facile ! On suppose qu'il y en a deux ...

Pour déterminer si un élément x admet un inverse :

1. On commence par une analyse pour déterminer la forme de cet inverse y
2. On vérifie alors que $y \in E$ et que $\begin{cases} x \star y = e \\ y \star x = e \end{cases}$.
   Si la loi $\star$ est commutative, on peut se contenter de démontrer que $x \star y = e$

Remarque 6.

1. Lorsqu'on sait que $x \in (E, \star)$ admet un inverse alors $x \star y = e$ suffit à prouver que y est l'inverse de a.
2. Si un élément $x \in E$ possède un inverse $y \in E$, alors l'élément y possède également un inverse qui est l'élément x. En d'autres termes, nous avons : $(x^{-1})^{-1} = x$ ou $-(-x) = x$

Remarque 7. L'élément neutre est toujours son propre inverse : $e^{-1} = e$.

PROPOSITION 3 : **Inversibilité du produit de deux éléments inversibles**
Soit $a,\ b$ deux éléments inversibles d'un monoïde $E,\ \star$.
Alors :

$$a \star b \text{ est inversible} \quad \text{et} \quad (a \star b)^{-1} = b^{-1} \star a^{-1}$$

Preuve 3 : Simple vérification.

Remarque 8.

⚠ $\star$ n'étant pas toujours commutative, il faut impérativement respecter l'ordre des éléments b^{-1} et a^{-1}.

DÉFINITION 7 : **Partie stable par une lci**
Soit $\star$ une lci sur un ensemble E et $F \subset E$ non vide.
On dira que F est *stable* par la lci $\star$ lorsque :

$$\forall a,\ b \in F, \quad a \star b \in F$$

2 Structure de groupe

2.1 Définition d'un groupe

DÉFINITION 8 : **Groupe**
Soient un ensemble G et $\star$ une loi sur G. On dit que $(G,\ \star)$ est un *groupe* si :

1. la loi $\star$ est une lci
2. la loi $\star$ est associative
3. G possède un élément neutre pour cette loi
4. Tout élément x de G admet un inverse dans G

Si de plus la loi $\star$ est commutative, on dit que le groupe est *abélien* (ou *commutatif*).

`Exemple 7.` Les groupes de référence (E est ici un ensemble quelconque non vide) :

1. Groupes additifs : $(\mathbb{Z},\ +)$, $(\mathbb{Q},\ +)$, $(\mathbb{R},\ +)$, $(\mathbb{C},\ +)$, $(\mathcal{F}(E,\mathbb{R}),\ +)$, $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ +)$, $(\mathfrak{M}_{n,p}(,)\ +)$.
2. Groupes multiplicatifs : $(\mathbb{Q}^*,\ \times)$, $(\mathbb{Q}^{*+},\ \times)$, $(\mathbb{R}^*,\ \times)$, $(\mathbb{R}^{*+},\ \times)$, $(\mathbb{C}^*,\ \times)$, $(\mathbb{U},\ \times)$, $(\mathbb{U}_n,\ \times)$, $(\mathcal{B}(E,E),\ \circ)$, $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{R}),\ \times)$.

DÉFINITION 9 : **Groupe des permutations d'un ensemble**
Si E est un ensemble fini non vide, alors :

$$\mathcal{B}(E,\ E) \quad \text{est appelé} \quad \text{le } \textit{groupe des permutations de l'ensemble} E$$

On note alors : $\mathcal{S}_E = \mathcal{B}(E,\ E)$.

Remarque 9.

1. Un groupe est donc un monoïde dont tous les éléments sont inversibles.
2. Si E un ensemble non vide, $(\mathcal{S}_E,\ \circ)$ est un exemple de groupe non abélien.

Remarque 10. Notations et propriétés :

Avec la notation Multiplicative $(G,\ .)$	Avec la notation Additive $(G,\ +)$
Notations	**Notations**
$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a^n = a.a.\dots.a$ et $a^0 = e_G$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ a^{-n} = (a^n)^{-1}$	$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ na = a + a + \dots + a$ et $0a = e_G$ $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ (-n)a = -(na)$
Propriétés	**Propriétés**
$(a.b)^{-1} = b^{-1}.a^{-1}$ $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\quad a^n = (a^{-n})^{-1} = (a^{-1})^{-n}$ $\forall (n,\ m) \in \mathbb{Z}^{*2},\quad a^{n+m} = (a^n).(a^m)$ $\forall (n,\ m) \in \mathbb{Z}^{*2},\quad (a^n)^m = a^{n.m}$	$-(a+b) = (-b) + (-a)$ $\forall n \in \mathbb{Z}^*,\quad na = -(-na) = (-n).(-a)$ $\forall (n,\ m) \in \mathbb{Z}^{*2},\quad (n+m)a = na + ma$ $\forall (n,\ m) \in \mathbb{Z}^{*2},\quad m(na) = (mn)a$

⚠⚠⚠. Les propriétés $\begin{cases} (a.b)^n = a^n.b^n \\ n(a+b) = na + nb \end{cases}$ ne sont valables que si la loi est commutative !

2.2 Sous-groupes

DÉFINITION 10 : Soit $(G,\ \star)$ un groupe.
Les sous-groupes de G sont les sous-ensembles H de G tels que $(H,\ \star)$ sont des groupes.

`Exemple 8.`

1. Si $(G,\ \star)$ est un groupe, alors $(\{e_G\},\ \star)$ et $(G,\ \star)$ sont 2 sous-groupes de $(G,\ \star)$.
2. $\left(C^0(\mathbb{R},\ \mathbb{R}),\ +\right)$ est un sous groupe de $\left(\mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R}),\ +\right)$

PROPOSITION 4 : **Caractérisation des Sous-groupes**
Soit $(G,\ \star)$ un groupe. $(H,\ \star)$ est un *sous-groupe* de G ssi :

1. H est une partie de G
2. Elément Neutre : $e_G \in H$
3. Stabilités :
   (a) H est *stable* par la lci : $\forall (x,\ y) \in H^2,\ x \star y \in H$.
   (b) H est stable par *symétrisation* : $\forall x \in H,\ x^{-1} \in H$. (ou $-x \in H$ avec la notation additive)

Preuve 4 : Pas de difficulté, sauf peut-être pour prouver que $e_G \in H$.
H étant un sous-groupe, alors il admet un élément neutre noté e_H. Prouvons que $e_H = e_G$.
On a : $\begin{cases} e_H \star e_H = e_H \\ e_H \star e_G = e_H \end{cases}$ donc $e_H \star e_H = e_H \star e_G$ et en composant par e_H^{-1} on obtient $e_H = e_G$.

Remarque 11.

1. L'avantage de cette caractérisation par rapport à la définition est qu'elle nous dispense de vérifier l'associativité de la loi $\star$.
2. Si e_g n'appartient pas à H alors H ne peut pas être un sous-groupe de G.
   Ainsi $(2\mathbb{Z}+1,\ +)$ *n'est pas un sous-groupe de* $(\mathbb{Z},\ +)$.

Ainsi, pour montrer que H est un sous-groupe du groupe $(G,\star)$, on procède en **4 étapes** :

1. On vérifie que : $H \subset G$
2. On vérifie que : $e_G \in H$
3. Stabilité par $\star$: Soit $(x,\ y) \in H^2$, on vérifie que $x \star y \in H$
4. Stabilité par symétrisation : Soit $x \in H$, on vérifie que $x^{-1} \in H$

`Exemple 9.` Prouver que $(\mathbb{U},\ \times)$ est un sous-groupe de $(\mathbb{C}^*,\ \times)$ où $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$.

Exercice : 2

$(**)$ Montrer que les sous-groupes de $(\mathbb{Z},\ +)$ sont les $(n\mathbb{Z},\ +)$ où $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice : 3

$(***)$. **Les sous-groupes de** $(\mathbb{R},\ +)$
Soit H un sous-groupe de $\mathbb{R}$ non réduit au singleton $\{0\}$.

1. Montrer que $H \cap \mathbb{R}^{+*}$ admet une borne inférieure. On la notera a.
2. Si a est en fait le minimum de $H \cap \mathbb{R}^{+*}$, montrer que H est le sous-groupe $a\mathbb{Z}$.
3. Si $H \cap \mathbb{R}^{+*}$ n'admet pas de minimum, montrer, par l'absurde, que a est nul puis que H est alors dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice : 4

$(*)$ Soit un ensemble E non-vide et un élément $a \in E$. On note $G = \{f \in \mathcal{B}(E,\ E),\ \text{tq } f(a) = a\}$
C'est l'ensemble des bijections de G laissant invariant l'élément a.
Montrer que $(G,\ \circ)$ est un groupe.

Exercice : 5

$(*)$ Soit $(G,\ .)$ un groupe. On note $C = \{x \in G \mid \forall g \in G,\ g.x = x.g\}$
C'est l'ensemble des éléments de G qui commutent avec tous les éléments de G.
Montrer que $(C,\ .)$ est un sous-groupe de G (appelé *centre* du groupe G).

DÉFINITION 11 : **Morphisme de groupes**
Soit $f : G_1 \to G_2$ une application.
On dit que f est un *morphisme* de groupes si et seulement si :

1. $(G_1,\ \star)$ et $(G_2,\ \bullet)$ sont deux groupes
2. $\forall (x,\ y) \in G_1^2,\quad \boxed{f(x \star y) = f(x) \bullet f(y)}$

Remarque 12. Un morphisme d'un groupe G vers lui-même est appelé un *endomorphisme* de groupes.

`Exemple 10.` Vous souvenez-vous du morphisme de groupes surjectif de $(\mathbb{R},\ +)$ dans $(\mathbb{U},\ \times)$?

Pour montrer que $f : G_1 \mapsto G_2$ est un morphisme de groupes :

1. On vérifie que $(G_1,\ \star)$ et $(G_2,\ \bullet)$ sont bien des groupes.
2. On vérifie que pour tout $(x,\ y) \in G_1^2$, on a bien $f(x \star y) = f(x) \bullet f(y)$.

`Exemple 11.` Soit $(G,\ .)$ un groupe et $a \in G$. Prouver que $\begin{array}{ccccc} f & : & (\mathbb{Z},\ +) & \longrightarrow & (G,\ .) \\ & & n & \mapsto & a^n \end{array}$ est un morphisme de groupes.

`Exemple 12.` Soit $\mathcal{T}$ l'ensemble des translations du plan $\mathcal{P}$. On note t_a est la translation de vecteur $\vec{v}_a$ d'affixe $a \in \mathbb{C}$.

Prouver que $\begin{array}{ccccc} f & : & (\mathbb{C},\ +) & \longrightarrow & (\mathcal{T},\ o) \\ & & a & \mapsto & t_a \end{array}$ est un morphisme de groupes.

3 Structure d'anneau

DÉFINITION 12 : **anneau**
Soit A un ensemble muni de deux lci notées $+$ et $\times$. On dit que $(A,\ +,\ \times)$ est un *anneau* ssi :

1. $(A,\ +)$ est un groupe *commutatif*
2. la loi $\times$ est *associative*
3. la loi $\times$ est *distributive* par rapport à la loi $+$:

$$\forall (x,\ y,\ z) \in A^3,\quad \begin{array}{l} x \times (y+z) = x \times y + x \times z \\ (x+y) \times z = x \times z + y \times z \end{array}$$

4. Il existe un *élément neutre* pour $\times$, noté 1_A (ou 1 s'il n'y a pas d'ambiguïté)

Remarque 13. Si en plus la loi $\times$ est commutative, on dit que $(A,\ +,\ \times)$ est un anneau commutatif.

Remarque 14.

1. Dans un anneau $(A,\ +,\ \times)$, on note $-x$ l'inverse de x pour la loi $+$ et 0 l'élément neutre de la loi $+$.
2. Par convention, on conviendra que pour tout $x \in A$, $x^0 = 1_A$. (en particulier, on convient que $0_A^0 = 1_A$)
3. ⚠ Un élément $x \in A$ n'a pas forcément d'inverse pour la loi $\times$, il ne faudra donc pas utiliser abusivement la notation x^{-1}.

`Exemple 13.` Tous les ensembles suivants sont des anneaux.

1. Ensembles de nombres : $(\mathbb{Z},+,\ \times)$, $(\mathbb{Q},\ +,\ \times)$, $(\mathbb{R},\ +,\ \times)$ et $(\mathbb{C},\ +,\ \times)$.
2. Applications : $(\mathbb{R}^I,\ +,\ \times)$, $(\mathbb{C}^I,\ +,\ \times)$ (I étant un intervalle de $\mathbb{R}$) .
3. Suites : $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ +,\ \times)$, $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ +,\ \times)$.
4. Polynômes : $(\mathbb{R}[X],\ +,\ \times)$, $(\mathbb{C}[X],\ +,\ \times)$.
5. Matrices carrées : $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ +,\ \times)$, $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{C}),\ +,\ \times)$ (non commutatifs).

Remarque 15. Comme dans le cas des groupes, on définit la notion de *sous-anneau* et il existe un théorème (hors-programme) de caractérisation des sous-anneaux.

DÉFINITION 13 : **L'anneau $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $n \geq 2$.
L'ensemble $\{0,\ 1,\ldots,\ n-1\}$ est noté $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ lorsqu'il est muni des lci $+$ et $\times$ définies de la façon suivante :

1. $a+b =$ le reste de la division euclidienne de $a+b$ par n.
2. $a \times b =$ le reste de la division euclidienne de $a \times b$ par n.

On montre alors que $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z},\ +,\times)$ est un anneau commutatif.

Remarque 16. La particularité de cet anneau est qu'il s'agit d'un anneau de cardinal FINI.

THÉORÈME 5 : **Règles de calcul dans un anneau**
On considère un anneau $(A,\ +,\ \times)$ dont on note 0 et 1 les éléments neutres respectifs de $+$ et $\times$.
On a les règles de calcul suivantes :

1)	$\forall a \in A$	$a \times 0 = 0 \times a = 0$
2)	$\forall a \in A$	$(-1) \times a = -a$ et $a \times (-1) = -a$
3)	$\forall (a,\ b) \in A^2$	$(-a) \times b = -(a \times b) = a \times (-b)$
4)	$\forall (a,\ b) \in A^2$	$(-a) \times (-b) = a \times b$
5)	Si x est inversible, (-x) l'est aussi et :	$(-x)^{-1} = -x^{-1}$
6)	Si x et y sont inversibles, $x \times y$ l'est aussi et :	$(x \times y)^{-1} = y^{-1} \times x^{-1}$
7)	On a la propriété de distributivité suivante :	$a.\sum_{k=1}^{n} x_k = \sum_{k=1}^{n} a.x_k$

Preuve 5 : On montre que $a \times 0 = 0$ en remarquant que $a \times 0 = a \times (0+0)$ et en appliquant la distributivité.
Les autres démonstrations ne présentent pas de difficulté.

Remarque 17. Si $(A,\ +,\ \times)$ est un anneau, $(A,\ \times)$ n'est pas un groupe. (car 0_A n'admet pas d'inverse)

PROPOSITION 6 : **Groupe des unités d'un anneau**
Soit un anneau $(A,\ +,\ \times)$.
On note A^* l'ensemble des éléments inversibles pour la loi $\times$: $A^* = \{a \in A \mid \exists a' \in A \text{ tq } a \times a' = a' \times a = 1_A\}$
L'ensemble $(A^*,\ \times)$ a une structure de groupe : c'est le *groupe des unités* de l'anneau A.

Preuve 6 : Pas de difficulté.

`Exemple 14.`

1. Dans l'anneau $(\mathbb{Z},+,\times)$, le groupe des unités est $(\{1,-1\},\times)$.
2. Dans l'anneau $\big(\mathcal{F}(I,\mathbb{R}),+,\times\big)$, le groupe des unités est constitué des fonctions qui ne s'annulent pas.

⚠⚠⚠. En général, dans un anneau : $\boxed{a \times b = 0 \not\Rightarrow a = 0 \text{ ou } b = 0}$
Lorsque $a \times b = 0$ avec $a \neq 0$ et $b \neq 0$, on dit que a et b sont des *diviseurs de zéro*.

`Exemple 15.` $(*)$ Recherchez des divideurs de zéro dans les anneaux $(\mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R}),\ +,\ \times)$, $(\mathbb{Z}/4\mathbb{Z},\ +,\ \times)$ et $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ +,\ \times)$.

THÉORÈME 7 : **Formule du binôme de Newton**
Soit $(A,\ +,\ \times)$, un anneau.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}$ et pour tout couple $(a,\ b) \in A^2$ tels que $\boxed{a.b = b.a}$: $\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$

Preuve 7 : Vous pouvez tenter une démonstration par récurrence de cette formule ...

Remarque 18. Cette formule est toujours vraie si l'anneau est commutatif.

THÉORÈME 8 : **Formule de factorisation**
Soit $(A,\ +,\ \times)$, un anneau.
Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout couple $(a,\ b) \in A^2$ tels que $\boxed{a.b = b.a}$:

$$\boxed{a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \cdots + ab^{n-2} + b^{n-1})} \quad = \quad (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^{n-1-k}b^k$$

Preuve 8 : Il suffit de développer ...

Remarque 19. Cette formule est toujours vraie si l'anneau est commutatif.

THÉORÈME 9 : **Calcul d'une progression géométrique**
Soit un anneau $(A, +, \times)$ et un élément $a \in A$. On considère un entier $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$.
On déduit de la formule de factorisation que :

$$\boxed{1 - a^n = (1-a)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1})}$$

Preuve 9 :
On applique la formule du théorème précédent lorsque $\begin{cases} a = 1_A \\ b = a \end{cases}$

Remarque 20. Lorsque $1 - a$ est inversible, on a alors : $1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} = (1-a)^{-1}(1-a^n)$

Remarque 21. Les 3 formules précédentes sont bien entendu valables dans les anneaux usuels $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ et $\mathbb{C}$.

4 Structure de corps

DÉFINITION 14 : **Corps**
On considère un ensemble $\mathbb{K}$ muni de deux lois de composition interne, notées $+$ et $\times$.
On dit que $(\mathbb{K},\ +,\ \times)$ est un *corps* si et seulement si :

1. $(\mathbb{K},\ +,\ \times)$ est un anneau commutatif non réduit à $\{0_\mathbb{K}\}$.
2. Tout élément non-nul de $\mathbb{K}$ est inversible pour la loi $\times$.

`Exemple 16.`

1. $(\mathbb{Q},\ +,\ \times)$, $(\mathbb{R},\ +,\ \times)$, $(\mathbb{C},\ +,\ \times)$ et $(F(X),\ +,\ \times)$ sont des corps.
2. $(\mathbb{Z},\ +,\ \times)$ n'est pas un corps car 1 et -1 sont les seuls éléments inversibles.
3. $(\mathfrak{M}_n(,)\ +,\ \times)$ n'est pas un corps car seules les "matrices inversibles" sont inversibles.

Remarque 22. Si $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps, alors $(\mathbb{K}^*, \times)$ est un groupe, où $\mathbb{K}^* = \mathbb{K}\backslash\{0_\mathbb{K}\}$.

PROPOSITION 10 : **Un corps est un anneau intègre**
Dans un corps $(\mathbb{K},\ +,\ \times)$, si deux éléments $(x,\ y) \in \mathbb{K}^2$ vérifient $x \times y = 0_K$, alors $x = 0_K$ ou $y = 0_K$.
En particulier, on peut "simplifier par un élément non nul" :

$$\forall (a,\ x,\ y) \in \mathbb{K}^3 \quad \text{avec} \quad a \neq 0_K, \quad \text{on a} \quad a \times x = a \times y \Rightarrow x = y$$

Preuve 10 : Evident !

THÉORÈME 11 : **Calcul d'une somme géométrique dans un corps**
Soit un élément $k \in \mathbb{K}$ du corps $(\mathbb{K}, +, \times)$.
Alors la formule suivante permet de calculer une progression géométrique de raison k :

$$\sum_{i=0}^{n} k^i = 1 + k + k^2 + \cdots + k^n = \begin{cases} (1-k)^{-1}\left(1-k^{n+1}\right) & \text{si } k \neq 1 \\ (n+1).1_{\mathbb{K}} & \text{si } k = 1 \end{cases}$$

⚠ En général, cette formule n'a pas de sens dans un anneau quelconque.

Preuve 11 : Vu précédemment !

Remarque 23. Les 3 formules vues précédemment dans le cas d'un anneau sont bien entendue valables dans un corps.

Remarque 24. On définit aussi la notion de *sous-corps* et il existe un théorème (hors-programme) de caractérisation des sous-corps.

4.1 Corps des fractions d'un anneau **Complément hors-programme**

Voici une méthode permettant de construire un corps à partir d'un anneau.
Elle permet en particulier de construire le corps $(\mathbb{Q}, +, \times)$ à partir de l'anneau $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

1. On considère un anneau $(A, +, \times)$.

2. Sur l'ensemble $A \times A^\star$, on définit une relation par :

$$\forall (a,\ b),\ (a',\ b') \in A \times A^\star, \quad (a,\ b)\mathcal{R}(a',\ b') \Longleftrightarrow a \times b' = a' \times b$$

On vérifie que la relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur l'ensemble $A \times A^\star$ (réflexive, symétrique et transitive).
On note alors $\mathbb{K}$ l'ensemble des classes d'équivalences de cette relation.
Un élément $k \in \mathbb{K}$ est donc la classe d'un couple $(a,\ b) \in A \times A^\star$, et on note cette classe :

$$k = \frac{a}{b}$$

3. Sur l'ensemble K, on définit deux lois notées $+$ et $\times$ de la façon suivante :
Soient $k = \text{Cl}(a,\ b)$ et $k' = \text{Cl}(a',\ b')$ deux classes d'équivalences de représentants $(a,\ b)$ et $(a',\ b')$.
On note alors :

$$1) \quad k + k' = \text{Cl}(a \times b' + b \times a',\ b \times b') \ : \quad \frac{a}{b} + \frac{a'}{b'} = \frac{a \times b' + b \times a'}{b \times b'}$$

$$2) \quad k \times k' = \text{Cl}(a \times a',\ b \times b') \ : \quad \frac{a}{b} \times \frac{a'}{b'} = \frac{a \times a'}{b \times b'}$$

et on vérifie que ces classes sont indépendantes des représentants $(a,\ b) \in k$ et $(a',\ b') \in k'$ choisis.

4. On montre alors que $(\mathbb{K}, +, \times)$ est un corps, appelé *corps des fractions* de l'anneau $(A, +, \times)$.

5. Comme l'application suivante est injective, elle permet d'inclure l'anneau A dans le corps $\mathbb{K}$:

$$\begin{array}{rccc} \phi & : & A & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & & a & \mapsto & \mathrm{Cl}(a,\ 1) \end{array}$$

En d'autres termes, on identifiera la fraction $\dfrac{a}{1}$ à l'élément a de l'anneau A.

Remarque 25. Cette construction est aussi utilisée pour définir le corps des fractions rationnelles à partir de l'anneau des polynômes.

5 Exercices de TD

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs ♡ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs ♡ correspond à la difficulté des exercices.

I] Les groupes

1. Le premier type de question consiste à prouver qu'un ensemble muni d'une loi est un groupe. Pour cela :
   (a) On montre (si c'est envisageable) que c'est un sous-groupe d'un groupe connu
   (b) Sinon, on montre que c'est une groupe en vérifiant toutes les conditions de la définition
2. D'autres questions consistent à utiliser le fait qu'un ensemble est un groupe pour démontrer des propriétés.

Exercice de TD : 1

(♡) Montrer que $G = \{p\sqrt{2} + q\sqrt{3} \mid p, q \in \mathbb{Z}\}$ est un sous-groupe de $(\mathbb{R}, +)$?

Exercice de TD : 2

(♡) Soit $(G,\ .)$ un groupe et $a \in G$. $H = \{a.g.a^{-1} \mid g \in G\}$ est-il un groupe ?

Exercice de TD : 3

$(*)$ Soit $(G,\ \star)$ un groupe et $x,\ y \in G$ tels que $\begin{cases} (x \star y)^{-1} = x^{-1} \star y \\ (y \star x)^{-1} = y^{-1} \star x \end{cases}$. Montrer que $\begin{cases} (x^2)^{-1} = y^2 \\ x^4 = y^2 = e \end{cases}$.

Exercice de TD : 4

$(*)$ Soit $(G,\ \star)$ un groupe et $H \subset G$ fini et stable par $\star$. Montrer que $(H,\ \star)$ est un sous-groupe de G.

Exercice de TD : 5

(♡)

1. Montrer que $(\mathbb{R}\backslash\{1\},\ \star)$ où la loi $\star$ est définie par $x \star y = x + y - xy$ est un groupe abélien.
2. Soit $x \in G$ et $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer x^n.

Exercice de TD : 6

$(**)$. Soit $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$. Dans $\mathbb{R}$, on définit la loi $\star$ par : $x \star y = a(x + y) + bxy + c$.
Déterminer une CNS sur $(a,\ b,\ c)$ pour que $(\mathbb{R}, \star)$ soit un groupe.

Exercice de TD : 7

(♡) Soit $(G,\ .)$ un groupe tel que : $\forall a \in G,\ a^2 = 1_G$.
Montrer que G est un groupe abélien.

Exercice de TD : 8

$(**)$. Soient H et K deux sous groupes d'un groupe G.
Montrer que $H \cup K$ est une sous-groupe de G si et seulement si $H \subset K$ ou $K \subset H$.

Exercice de TD : 9

Caractérisation du pgcd et du ppcm avec les sous-groupes de $\mathbb{Z}$
$(**)$ Soient deux entiers non nuls a et b.

Prouver que :
1. δ est le PGCD de a et b ssi $\delta\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z}$ (avec Bezout)
2. μ est le PPCM de a et b ssi $\mu\mathbb{Z} = a\mathbb{Z} \cap b\mathbb{Z}$

Exercice de TD : 10

(♡♡) **Test de primalité : le théorème de Wilson**
Soit un entier naturel $p \geq 3$.

1. On suppose $(p-1)! \equiv -1\ [p]$. Démontrer que p est un nombre premier.
2. On suppose p premier.
   Soit $G = [\![1, p-1]\!]$. $\forall (x,\ y) \in G^2$, $x \circ y$ est le reste de la division euclidienne de $x.y$ par p.
   (a) Démontrer que $(G,\ \circ)$ est un groupe dont on précisera l'élément neutre e. Résoudre $x \circ x = e$ dans G.
   (b) Démontrer que $(p-1)! \equiv -1\ [p]$.
3. Enoncer le théorème démontré. Que dire pour $p = 2$?
4. Tester ce théorème pour $2 \leq p \leq 11$.

Exercice de TD : 11

(∗∗) Cet exercice permet de retrouver certaines propriétés importantes du PGCD.

1. Soient H_1 et H_2 deux sous-groupes de $(\mathbb{Z},\ +)$.
   On définit l'ensemble $H_1 + H_2 = \{h_1 + h_2 \mid (h_1,\ h_2) \in H_1 \times H_2\}$.
   Montrer que $H_1 + H_2$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sous-groupe de $(\mathbb{Z},\ +)$ qui contient la partie $H_1 \cup H_2$.
2. Application du résultat précédent :
   Soient a et b deux entiers naturels non nuls.
   (a) i. Justifier que $a\mathbb{Z} + b\mathbb{Z} = \delta\mathbb{Z}$ où $\delta \in \mathbb{N}^*$ est un diviseur commun à a et b.
   ii. Montrer qu'il existe $u,\ v \in \mathbb{Z}$ tels que $\delta = au + bv$.
   iii. Conclure que δ est le PGCD de a et b.
   (b) Bilan : Citer 2 propriétés importantes liées au PGCD de deux entiers.
   (c) Déduire des deux questions précédentes le sous-groupe $4\mathbb{Z} + 6\mathbb{Z}$.

Exercice de TD : 12

(♡♡♡) **Les sous-groupes de** $(\mathbb{R},\ +)$

Soit H un sous-groupe de $\mathbb{R}$ non réduit au singleton $\{0\}$.

1. Montrer que $H \cap \mathbb{R}^{+*}$ admet une borne inférieure. On la notera a.
2. Si a est en fait le minimum de $H \cap \mathbb{R}^{+*}$, montrer que H est le sous-groupe $a\mathbb{Z}$.
3. Si $H \cap \mathbb{R}^{+*}$ n'admet pas de minimum, montrer, par l'absurde, que a est nul puis que H est alors dense dans $\mathbb{R}$.

II] Les anneaux

Dans la très grande majorité des exercices, on montre qu'un ensemble muni de deux lois est un anneau en prouvant que c'est un sous-anneau d'un anneau de référence.

Exercice de TD : 13

(♡♡) On considère $A = \{a + b\sqrt{2} \mid a,\ b \in \mathbb{Z}\}$. On note alors $N(a + b\sqrt{2}) = a^2 - 2b^2$.

1. Montrer que $(A,\ +,\ \times)$ est un anneau intégre. (Bien entendu, "+" et "×" sont les lci usuelles)
2. Montrer que pour tout $x,\ y \in A$, on a $N(xy) = N(x)N(y)$.
   En déduire que : x est inversible $\iff N(x) = \pm 1$.
3. Montrer que $(1 + \sqrt{2})^n$ est inversible pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Réciproquement, soit $x = a + b\sqrt{2}$ un élément inversible de A.
   (a) Montrer qu'on peut se ramener au cas où $a,\ b \in \mathbb{N}$ avec $a \neq 0$.
   (b) Montrer que $x = (1 + \sqrt{2})^n$ avec $n \in \mathbb{N}$. *Aide : si $b \geq 1$, on pourra considérer $x_1 = \dfrac{x}{1 + \sqrt{2}}$.*

Exercice de TD : 14

(♡) Soit A un anneau. On dit que $x \in A$ est nilpotent, s'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $x^n = 0_A$.

1. Montrer que si xy est nilpotent, alors yx l'est aussi.
2. On suppose que x et y commutent et x et y nilpotents. Montrer que $x + y$ et xy sont nilpotents.
3. On suppose x nilpotent. Montrer que $1 - x$ est inversible.

Exercice de TD : 15

(∗) Soit $(A,\ +,\ \times)$ un anneau. On dit que $x \in A$ est nilpotent, s'il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $x^n = 0_A$.

1. Montrer que si a est nilpotent, alors $1 - a$ est inversible et calculer son inverse.
2. Soit $a \in A$. On définit l'application $u : \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & A \\ x & \mapsto & ax - xa \end{array}$. Calculer $u^p = uouo \dots ou$.
3. Montrer que si a est nilpotent, il existe $p \in \mathbb{N}^*$ tel que u^p soit l'application nulle.

Exercice de TD : 16

(∗∗). Soit a, b deux éléments d'un anneau $(A,\ +,\ \times)$ tels que ab soit inversible et b non diviseur de 0.
Montrer que a et b sont inversibles.

III] Les corps

Dans la très grande majorité des exercices, on montre qu'un ensemble muni de deux lois est un corps en prouvant que c'est un sous-corps d'un corps de référence.

Exercice de TD : 17

(♡) Pour tout $a,\ b \in \mathbb{R}$, on note $\begin{cases} a \oplus b = a+b-1 \\ a \star b = ab-a-b+2 \end{cases}$.
Montrer que $(\mathbb{R},\ \oplus,\ \star)$ est un corps.

Exercice de TD : 18

(∗∗) Montrer que si F est un sous-corps de $(\mathbb{Q},\ +,\ \times)$, alors $F = \mathbb{Q}$.

Exercice de TD : 19

(♡) Soit r un rationnel $(r > 0)$ et que $\sqrt{r} \notin \mathbb{Q}$. On note $\mathbb{Q}(\sqrt{r}) = \{a + b\sqrt{r} \mid (a,b) \in \mathbb{Q}^2\}$.
Montrer que $\mathbb{Q}(\sqrt{r})$ est un corps pour les lois usuelles de $\mathbb{R}$.

Exercice de TD : 20

(∗) Montrer que tout anneau intègre fini est un corps.
Aide : vous pourrez commencer par étudier pour tout $a \in E$ non nul, l'application $f_a : x \mapsto ax$

Exercice de TD : 21

(♡) Soit l'application $\begin{array}{rccc} \psi\ : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ & (a,\ b) & \mapsto & a+ib \end{array}$. On note $\mathbb{Z}[i] = \psi(\mathbb{Z}^2)$ et $\mathbb{Q}(i) = \psi(\mathbb{Q}^2)$.

1. Montrer que $(\mathbb{Z}[i],\ +,\ \times)$ est un anneau intègre qui n'est pas un corps.
2. Montrer que $(\mathbb{Z}(i),\ +,\ \times)$ est un corps dont $\mathbb{Z}[i]$ est un sous-anneau.
3. Vérifier que toute fraction A/B avec $A,\ B \in \mathbb{Z}[i]$ appartient à $\mathbb{Z}(i)$ et réciproquement, que tout élément de $\mathbb{Z}(i)$ s'écrit comme une fraction A/B avec $A,\ B \in \mathbb{Z}[i]$.