Les Fractions Rationnelles

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

2 février 2018

$$\boxed{F = E + \sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{ij}}{(X-a_i)^j}) + \sum_{i=1}^{p} (\sum_{j=1}^{\beta_j} \frac{\gamma_{ij}X + \delta_{ij}}{(X^2+p_iX+q_i)^j})}$$

DES sur $\mathbb{R}$

1 Définition du corps des fractions rationnelles

$\mathbb{K}[X]$ est un anneau commutatif intègre, mais ce n'est pas un corps.
A partir de l'anneau $\mathbb{Z}$, nous avons construit le corps $\mathbb{Q}$. De la même manière, nous pouvons construire à partir de $\mathbb{K}[X]$ le corps $\mathbb{K}(X)$ des fractions rationnelles. Le détail de la construction de $\mathbb{K}(X)$ n'est pas au programme.

Définition 1 : **Fractions rationnelles**
Une fraction rationnelle sur $\mathbb{K}$ est notée $F(X) = \dfrac{P(X)}{Q(X)}$ où P et Q sont deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $Q \neq 0$.
On note $\mathbb{K}(X)$ l'ensemble des fractions rationnelles.

Définition 2 :
On définit l'égalité de deux fractions rationnelles par : $\dfrac{P_1}{Q_1} = \dfrac{P_2}{Q_2} \Longleftrightarrow P_1.Q_2 = P_2.Q_1$
Si $F = \dfrac{P}{Q}$ alors $\dfrac{P}{Q}$ est appelé un représentant de F.

`Exemple 1.` $\dfrac{X}{X^2+1}$, $\dfrac{2X}{2X^2+2}$ et $\dfrac{X^2}{X^3+X}$ sont des représentants de la même fraction.

Définition 3 : **Représentant irréductible**
Si $F \in \mathbb{K}(X)$ s'écrit $F = \dfrac{P}{Q}$ avec $P \wedge Q = 1$ alors le couple (P, Q) est unique à une constante multiplicative non nulle près.
$\dfrac{P}{Q}$ est alors appelé un (et pas "le" !!) représentant irréductible de F.

`Exemple 2.` Soit $F = \dfrac{X^2-3X+2}{X^2-1}$. Alors F admet $\dfrac{X-2}{X+1}$ pour représentant irréductible.

Remarque 1. On obtient un représentant irréductible de $\dfrac{P}{Q}$ en divisant P et Q par $P \wedge Q$.

Définition 4 : Les Lois
On définit sur $\mathbb{K}(X)$ la somme $+$, le produit $\times$ et la loi externe . par les formules suivantes :
Soient $(F_1,\ F_2) \in \mathbb{K}(X)$ telles que $F_1 = \dfrac{P_1}{Q_1}$, $F_2 = \dfrac{P_2}{Q_2}$ et $\lambda \in \mathbb{K}$

1. $F_1 + F_2 = \dfrac{P_1Q_2 + P_2Q_1}{Q_1Q_2}$
2. $F_1 \times F_2 = \dfrac{P_1P_2}{Q_1Q_2}$
3. $\lambda.F_1 = \dfrac{\lambda.P_1}{Q_1}$

Remarque 2.
On vérifie simplement que les résultats de ces 3 opérations sont indépendants des réprésentants choisis.

Théorème 1 : Structure
Muni des lois précédentes, $\big(\mathbb{K}(X),\ +,\ \times\big)$ est un corps.

Preuve 1 : Il faut redémontrer une à une toutes les propriétés qui définissent la structure de Corps.

Remarque 3.
Tout $P \in \mathbb{K}[X]$ s'indentifie à la fraction $\dfrac{P}{1}$ et on peut donc considérer que $\mathbb{K}[X] \subset \mathbb{K}(X)$.

Définition 5 : Degré d'une fraction rationnelle
Soit une fraction rationnelle $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$. On appelle degré de F, l'élément de $\mathbb{Z}$ défini par :

$$\boxed{\deg F = \deg P - \deg Q}$$

Lorsque $F \neq 0$, le degré de F est un entier relatif.
Lorsque $F = 0$, $\deg F = -\infty$.

Remarque 4. La fonction "degré" est bien indépendante du représentant choisi !

`Exemple 3.` Si $F = \dfrac{X^2}{X^4+1}$ et $G = \dfrac{X^2}{X-1}$ alors $\deg(F) = -2$ et $\deg(G) = 1$.

⚠ ATTENTION ⚠

Une fraction rationnelle de degré positif n'est pas forcément un polynôme
(cf la fraction G ci-dessus).

Proposition 2 : Propriétés du degré d'une fraction rationnelle
On a les mêmes propriétés que pour le degré des polynômes :

1. $\deg(F_1 + F_2) \leq \max(\deg F_1, \deg F_2)$
2. $\deg(F_1F_2) = \deg F_1 + \deg F_2$
3. $\deg(\lambda.F) = \deg(F)$ si $\lambda \neq 0$ et $\deg(\lambda.F) = -\infty$ si $\lambda = 0$.

Preuve 2 : Il suffit de faire les calculs ...

Remarque 5. Si $\deg(F_1) \neq \deg(F_2)$, alors on a $\deg(F_1 + F_2) = \max(\deg F_1, \deg F_2)$.

Proposition 3 : Soit $n \in \mathbb{Z}$.
L'ensemble $\mathbb{K}_n(X)$ des fractions rationnelles de degré inférieur ou égal à n est un sev de $\mathbb{K}(X)$.

Preuve 3 : On utilise la méthode usuelle pour démontrer qu'un ensemble est un sev.

Remarque 6. En revanche, comme $\mathbb{K}_n(X)$ n'est pas stable par $\times$, ce n'est pas une sous-algèbre de $\mathbb{K}(X)$.

Définition 6 : Zéros, pôles d'une fraction rationnelle

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ où $\dfrac{P}{Q}$ est $\boxed{\text{irréductible}}$. Les racines de $\begin{cases} P \text{ s'appellent les } \textit{zéros} \text{ de } F \\ Q \text{ s'appellent les } \textit{pôles} \text{ de } F \end{cases}$.

Remarque 7.

1. La définition des $\left\{\begin{array}{l}\textit{zéros}\\ \textit{pôles}\end{array}\right.$ d'une fraction rationnelle est indépendante du représentant irréductible choisi.
2. Un pôle (resp. zéro) $a \in \mathbb{K}$ de la fraction $F = \dfrac{P}{Q}$ est dit de *multiplicité* $k \in \mathbb{N}$, lorsque a est une racine d'ordre de multiplicité k du polynôme Q (resp. P).

`Exemple 4.` Soit $F = \dfrac{(X-1)^2}{(X^2+1)(X+1)}$.

1. Dans $\mathbb{R}(X)$, 1 est le seul zéro de F (d'ordre 2) et -1 est le seul pôle de F.
2. Dans $\mathbb{C}(X)$, 1 est le seul zéro de F (d'ordre 2) et -1, i et -i sont les pôles de F.

DÉFINITION 7 : **Dérivée d'une fraction rationnelle**

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$.

La fraction rationnelle dérivée de F est alors définie par : $F' = \dfrac{P'Q - PQ'}{Q^2}$

DÉFINITION 8 : **fonctions rationnelles**

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ où $\dfrac{P}{Q}$ est irréductible et $\mathcal{P}$ est l'ensemble des pôles de F.

La *fonction rationnelle* $\widetilde{F}$ associée à F est définie par : $\begin{array}{rccc}\widetilde{F} : & \mathbb{K}\setminus\mathcal{P} & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & x & \mapsto & \dfrac{\widetilde{P}(x)}{\widetilde{Q}(x)}\end{array}$.

On pourra noter $\mathbb{K}(x)$ l'ensemble des fonctions rationnelles.

Remarque 8. Comme pour les polynômes, la fonction rationnelle $\widetilde{F}$ sera plus simplement notée F.

2 Décomposition en éléments simples - La théorie

THÉORÈME FONDAMENTAL 4 : **Formule générale**

Soit $F = \dfrac{P}{Q} \in \mathbb{K}(X)$ irréductible telle que Q admet pour décomposition en facteurs irréductibles dans $\mathbb{K}[X]$:

$$Q = \prod_{k=1}^{n} P_k^{\alpha_k}$$

La fraction F s'écrit alors de façon *unique* sous la forme :

$$F = E + \left(\frac{Q_{11}}{P_1} + \frac{Q_{12}}{P_1^2} + \cdots + \frac{Q_{1\alpha_1}}{P_1^{\alpha_1}}\right) + \cdots + \left(\frac{Q_{n1}}{P_n} + \frac{Q_{n2}}{P_n^2} + \cdots + \frac{Q_{n\alpha_n}}{P_n^{\alpha_n}}\right)$$

avec :

1. E le quotient de la division euclidienne de P par Q appelée la *partie entière* de F.
2. $Q_{ij} \in \mathbb{K}[X]$ avec $\deg Q_{ij} < \deg P_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ et $j \in [\![1, \alpha_i]\!]$

Cette relation s'appelle *la Décomposition en Eléments Simples (DES) de* F sur $\mathbb{K}$.

Preuve 4 : Admise.

Remarque 9.

1. La fraction $\widehat{F} = F - E$ est appelée la *partie fractionnaire* de F.
2. Les termes apparaissant dans la décomposition précédente de F sont appelés des *éléments simples*.

Les éléments simples dans $\mathbb{K}(X)$ sont donc :

(a) Les polynômes de $\mathbb{K}[X]$.

(b) Les fractions rationnelles de la forme $\dfrac{Q}{P^\alpha}$ avec $P \in \mathbb{K}[X]$ irréductible, $\begin{cases} Q \in \mathbb{K}[X] \\ \deg Q < \deg P \end{cases}$ et $\alpha \in \mathbb{N}^*$.

DES sur $\mathbb{R}$ et sur $\mathbb{C}$:

1. La DES sur $\mathbb{C}$ est de la forme : $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{ij}}{(X-a_i)^j})$
2. La DES sur $\mathbb{R}$ est de la forme : $F = E + \displaystyle\sum_{i=1}^{n} (\sum_{j=1}^{\alpha_i} \frac{\lambda_{ij}}{(X-a_i)^j}) + \sum_{i=1}^{p} (\sum_{j=1}^{\beta_j} \frac{\gamma_{ij}X + \delta_{ij}}{(X^2+p_iX+q_i)^j})$

`Exemple 5.` $(*)$ Donner la forme de la DES de $F = \dfrac{X^{11} - X^5 + 1}{(X^2+X+1)^3(X-2)^3}$ sur $\mathbb{C}$ et sur $\mathbb{R}$.

Python

```
La décomposition en éléments simples de F(X) sous Python est donnée par les instructions :

>>> from sympy import var, apart
>>> var('X')
>>> apart(F(X),X)
```

Proposition 5 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P \in \mathbb{K}_n[X]$ scindé $\begin{cases} \text{de racines } a_1, \ \ldots, \ a_n \\ \text{d'ordre de multiplicité } \alpha_1, \ \ldots, \ \alpha_n \end{cases}$.

La décomposition en éléments simples de $\dfrac{P'}{P}$ est alors :

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{X-a_k}$$

Preuve 5 : Il suffit de faire le calcul ...

Exercice : 1

$(**)$ Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$ et de racines $x_1, \ldots x_n$ distinctes ou non. Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $P(a) \neq 0$.
Calculer à l'aide des données, les sommes :

1. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{a-x_i}$
2. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i}{a-x_i}$
3. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{(a-x_i)^2}$
4. $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{\lambda.x_i + \mu}{(a-x_i)^2}$ $(\lambda \neq 0)$

Exercice : 2

$(**)$ Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ n'ayant que des racines réelles.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P'^2(x) - P(x)P''(x) \geq 0$.

3 Décomposition en Eléments Simples - La pratique

Méthode générale de décomposition en éléments simples

1. On commence par donner la forme générale de la décomposition en éléments simples.
2. A l'aide des techniques vues au paragraphe suivant, on détermine dans l'ordre :
   — la partie entière E, puis la partie fractionnaire $\widehat{F}$.
   — les coefficients associées aux pôles simples
   — les coefficients associés aux pôles multiples
   — les coefficients associés aux polynômes irréductibles de degré 2

`Exemple 6.` Ainsi, on pourra directement écrire que :

$$\frac{X^4}{(X-1)(X-2)^2} = aX + b + \frac{c}{X-1} + \frac{d}{X-2} + \frac{e}{(X-2)^2}$$

et rechercher les coefficients a, b, c, d et e à l'aide des techniques suivantes...

3.1 Recherche de la partie entière E

On commence par regarder si $\deg F < 0$ car dans ce cas, on a $E = 0$.

Sinon, on déterminera la partie entière E :

1. Soit directement en effectuant la division euclidienne de P par Q
2. Soit en écrivant E sous sa forme générale en remarquant que $\deg E = \deg(F)$.
   On trouve alors les coefficients de E en comparant les équivalents des fonctions rationnelles associées en $+\infty$ puis en recommençant l'opération après avoir soustrait l'équivalent obtenu.

`Exemple 7.` $(*)$ Déterminer par deux méthodes différentes la partie entière de la fraction $F = \dfrac{X^4}{(X-1)(X-2)^2}$.

3.2 Recherche des coefficients associés aux pôles simples

Notons $F = \frac{P}{Q}$ irréductible avec a un pôle simple.
Nous pouvons alors écrire au choix :

$$F = \frac{P}{(X-a)\widehat{Q}} \text{ avec } \widehat{Q}(a) \neq 0 \qquad \text{ou} \qquad F = \frac{P}{(X-a)Q'(a) + (X-a)^2.T} \quad \text{en appliquant Taylor}$$

On en déduit alors les deux formules suivantes :

Recherche de la partie polaire $\dfrac{\lambda}{X-a}$ associée à un pôle simple a

Pour trouver le scalaire λ, on peut utiliser l'une des deux formules suivantes :

$\boxed{\lambda = \dfrac{P(a)}{\widehat{Q}(a)}}$ où $Q = (X-a)\hat{Q}$ $\qquad$ $\boxed{\lambda = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}}$ lorsque Q n'est pas factorisé

`Exemple 8.` $(*)$ Décomposer les fractions rationnelles suivantes sur $\mathbb{C}$.

1. $F(X) = \dfrac{X-4}{(X-1)(X+1)X}$
2. $G(X) = \dfrac{X^4+X+1}{X(X-1)(X-2)}$
3. $H(X) = \dfrac{X^{n-1}}{X^n-1}$ $(n \in \mathbb{N}^*)$

3.3 Recherche des coefficients associés aux pôles multiples

Supposons que $a \in \mathbb{K}$ soit un pôle d'ordre $n \geq 2$.
La DES est alors de la forme :

$$F = E + \frac{a_1}{X-a} + \frac{a_2}{(X-a)^2} + \cdots + \frac{a_n}{(X-a)^n} + \hat{F}$$

On souhaite déterminer les valeurs de a_k.

3.3.1 Méthodes Générales

Méthode Générale 1 : En s'inspirant du cas des pôles simples

1. On multiplie la relation obtenu par la DES par $(X-a)^n$ puis on prend $x=a$.
   On obtient alors la valeur de a_n.
2. En soustrayant $\dfrac{a_n}{(X-a)^n}$ de part et d'autre de la relation, on diminue de 1 l'ordre du pôle a.
3. On peut alors ré-itérer l'algorithme précédent.

`Exemple 9.` $(*)$ Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}$ la fraction $F=\dfrac{X^5+1}{(X-3)(X-1)^2}$.

Exercice : 3

$(*)$ Décomposer dans $\mathbb{C}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $I=\dfrac{X^2-1}{X(X-i)^3}$
2. $J=\dfrac{2X^2+5}{(X^2-1)^3}$

Méthode Générale 2 : avec un Développement Asymptotique

1. Comme $F=E+\dfrac{a_1}{X-a}+\dfrac{a_2}{(X-a)^2}+\cdots+\dfrac{a_n}{(X-a)^n}+\hat{F}$, alors au voisinage de a nous avons :

$$F(x)=\frac{a_n}{(x-a)^n}+\cdots+\frac{a_2}{(x-a)^2}+\frac{a_1}{x-a}+o(\frac{1}{x-a})$$

   Ce qui est un Développement Asymptotique de $F(x)$ au voisinage de 1.

2. On constate alors, d'après l'unicité du DA, qu'il suffit de déterminer un DA de $F(x)$ au voisinage de 1 pour obtenir les valeurs de a_1, …, a_n

`Exemple 10.` $(*)$ Appliquer cette méthode pour obtenir la DES de $F=\dfrac{X^2+1}{X(X-1)^3}$

Exercice : 4

$(***)$ Déterminer le DES sur $\mathbb{R}[X]$ de $F=\dfrac{1}{X^m(1-X)^n}$ avec $m,\ n\in\mathbb{N}^*$.

3.3.2 Autres méthodes classiques

Les méthodes suivantes permettent parfois de gagner beaucoup de temps dans les calculs des coefficients :

1. **Méthode 1 :**
   Si F est paire où impaire, on peut trouver des relations entre les coefficients en considérant $\widehat{F}(-X)$.

   Exemple : $F=\dfrac{X}{X^4+1}$

2. **Méthode 2 :**
   Si on cherche une DES dans $\mathbb{C}(X)$ de $F\in\mathbb{R}(X)$, on peut trouver des relations entre les coefficients de la DES dans $\mathbb{C}$, en considérant la fraction conjuguée de $\widehat{F}$.
   Il est inutile d'utiliser cette méthode en complément de la méthode 1...

   Exemple : $F=\dfrac{X+1}{(X^2+1)^2}$

3. **Méthode 3 :**
   On peut multiplier la DES de $\widehat{F}$ par X et faire tendre x vers ∞ dans la fonction rationnelle associée.

4. **Méthode 4 :**
   On peut facilement obtenir des relations vérifiées par les coefficients en choisissant des valeurs simples de x (différentes des valeurs des pôles) dans les fractions rationnelles associées.

5. **Méthode 5 :**
   On peut procéder par identification des coefficients.
   Cette méthode est déconseillée car elle aboutit à des systèmes longs à résoudre...

6. **Méthode 6 :**
   On peut procéder à une décomposition intuitive du numérateur.

   Exemple : $F = \dfrac{X^3 - X^2 + 1}{(X^2+1)^3}$ dans $\mathbb{R}(X)$.

Exercice : 5
$(*)$ Décomposer $F = \dfrac{X^4 + X^2 + 1}{X^2(X^2-1)}$ en éléments simples.

Exercice : 6
$(**)$ Soit $a \in \mathbb{R}^*$ et $n \in \mathbb{N}^*$.
Décomposer sur $\mathbb{C}$ la fraction rationnelle suivante : $F = \dfrac{1}{(X^2-a^2)^n}$.

Aide : on pensera a utiliser la parité et on effectuera un développement asymptotique de F au voisinage de a.

3.3.3 Autres méthodes possibles

Certaines méthodes, plus anecdotiques, peuvent cependant s'avérer très efficaces :

1. **Méthode 7 :**
   Lorsqu'il s'agit de décomposer en éléments simples $\dfrac{A}{(X-a)^k}$ avec $\begin{cases} \deg A \geq 1 \\ A \in \mathbb{K}[X] \end{cases}$, on peut décomposer A en utilisant la formule de Taylor : $A = a_0 + a_1(X-a) + \cdots + a_n(X-a)^n$.

   Exemple : $F = \dfrac{X^2+1}{(X-1)^3}$ (voir aussi la méthode 6)

3.4 Recherche des coefficients associés aux polynômes irréductibles de degré 2

Bien entendu, ceci ne concerne que les DES dans $\mathbb{R}(X)$.
Plusieurs méthodes peuvent être envisagées.
On peut :

1. **Méthode 1 :**
   Déterminer $\gamma X + \delta$ de l'élément simple $\dfrac{\gamma X + \delta}{(X^2+pX+q)^n}$ (n étant la plus grande des puissances) en appliquant la formule :
   $$(z^2+pz+q)^n F(z) = \gamma z + \delta \quad \text{où} \quad z \text{ est racine de } X^2+pX+q$$

2. **Méthode 2 :**
   Procéder par identification (à éviter si les calculs sont trop longs).
   Pour cela, on exprime la fraction et sa DES sous la même forme et on identifie les coefficients.

3. **Méthode 3 :**
   Quand le facteur irréductible X^2+pX+q est uniquement à la puissance 1, on peut commencer par effectuer une DES sur $\mathbb{C}$, puis regrouper les éléments simples complexes.
   Attention, cette méthode ne marche plus si la puissance vaut $n \geq 2$.

   Exemple : $F = \dfrac{X^2}{(X+2)(X^2+1)}$ et contre-exemple : $G = \dfrac{X^2-1}{(X^2+1)^2}$

4. **Méthode 4 :**
   Prendre des valeurs de x particulières différentes des pôles.
   On obtient ainsi des relations entre les coefficients.

5. **Méthode 5 :**
   Prendre la limite de $x^k F(x)$ en $+\infty$ et obtenir ainsi une nouvelle relation portant sur les coefficients de la DES.

Exercice : 7

$(*)$ Décomposer en éléments simples sur $\mathbb{R}(X)$ les fractions rationnelles suivantes :

1. $F = \dfrac{1}{1+X^4}$
2. $F = \dfrac{X^3-1}{X(X^2+1)^2}$
3. $F = \dfrac{1}{(X^2+2X+2)(X^2+2X+5)}$

Remarque 10. La décomposition en éléments simples sert en particulier dans le calcul de primitives mais trouve de nombreuses autres applications comme nous le verrons dans les exercices de TD.

4 Connaissez-vous votre cours ?

Vous devez impérativement savoir répondre aux différentes questions suivantes :

	Questions	Réponses attendues
1.	De quel degré est la fraction rationnelle $F = \dfrac{X(X^2-1)}{X^5+3X-2}$	$\deg F = -2$
2.	Quelle différence faites-vous entre racines et pôles d'un polynôme ?	cf cours
3.	Quel est le degré de la partie entière de la fraction $F = \dfrac{X^7-X^2}{1+X^3} + \dfrac{X(X^2+2)}{X-1}$?	$\deg E = 4$
4.	Quelle est la première étape de la DES d'une fraction ?	Div. Euclidienne
5.	Comment obtenir la DES de $\dfrac{A}{(X-a)^n}$ où $\deg A < n$?	On peut appliquer Taylor à A en a.
6.	Quelle est la forme de la DES de $F = \dfrac{X^3+X-1}{(X-1)^2(X+2)}$	$b + \frac{c}{(X-1)^2} + \frac{d}{(X-1)} + \frac{e}{(X+2)}$
7.	Comment gagner du temps dans la DES dans $\mathbb{C}$ de $F = \dfrac{X^3}{1+X^2}$	F impaire
8.	Rappeler la DES de $\dfrac{P'}{P}$ lorsque P est scindé.	cf cours
9.	Donner la DES dans $\mathbb{R}$ de $F = \dfrac{3}{(X-2)^2}$.	C'est un él^t simple !

10.	Valeur du coef associé au pôle simple a des parties fractionnaires $F = \dfrac{P}{Q}$?	$\alpha = [(X-a)F(X)](a)$ $\alpha = \dfrac{P(a)}{Q'(a)}$
11.	Donner le coefficient associé au pôle $\omega_k = e^{\frac{2ik\pi}{n}}$ de $F = \dfrac{X^{n-1}}{X^n - 1}$.	$\alpha_k = \dfrac{1}{n}$
12.	Rappeler la méthode pour trouver la DES de la partie polaire associée à un pôle d'ordre 2.	cf cours
13.	Rappeler la méthode pour trouver la DES de la partie polaire associée à un pôle d'ordre 3.	cf cours
14.	Que doit-on penser à regarder avant d'effectuer la DES d'une partie fractionnaire ?	La parité !
15.	Quelles sont les différentes techniques pour des relations entre coef ?	Utiliser la parité Utiliser $F \in \mathbb{R}[X]$ Prendre une valeur Limite en ∞

5 Exercices de TD

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs ♡ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs ♡ correspond à la difficulté des exercices.

I] Divers

Exercice de TD : 1

($**$) Montrer qu'il n'existe pas de fraction F de $\mathbb{C}(X)$ telle que $F' = \dfrac{1}{X}$.

Aide : On pourra procéder par l'absurde en examinant les termes dominants ou en utilisant Gauss

II] Décompositions en éléments simples

Les techniques de décomposition en éléments simples ont été vues en détail dans le cours.

1. On commence toujours par étudier le degré de la fraction afin de rechercher la partie entière éventuelle (souvent par division euclidienne).
2. On détermine alors la décomposition en facteurs irréductibles du dénominateur afin de donner la forme générale de la DES.
3. On recherche alors les coefficients associés aux différents pôles.
   (a) en utilisant l'une des deux formules du cours dans le cas des pôles simples
   (b) en utilisant les "ruses" du cours pour déterminer des relations entre les coefficients cherchés
   (c) en effectuant l'une des deux méthodes générales (DA ou Produit par $(X-a)^n$) dans le cas des pôles d'ordre multiple

Exercice de TD : 2

(♡) Décomposer en éléments simples les fractions rationnelles suivantes :

1. $F(X) = \dfrac{1}{(X^2-4)(X-1)^4}$ dans $\mathbb{R}[X]$
2. $F(X) = \dfrac{X}{X^3-1}$ dans $\mathbb{R}[X]$

Exercice de TD : 3

(♡♡♡) Soit $F = \dfrac{U}{V}$ avec a un pôle double de F.
Exprimer les coefficients de la décomposition en éléments simples associés à ce pôle double uniquement en fonction de U et V et de leur dérivée !

Aide : pensez à appliquer la formule de Tayor à V en a.

III] Applications de la décomposition en éléments simples

Les DES peuvent servir en particulier à :

1. calculer l'intégrale ou une primitive d'une fonction rationnelle
2. calculer des sommes en se ramenant à des sommes télescopiques
3. calculer des dérivées de fonctions rationnelles

Exercice de TD : 4

($*$) Exprimer la dérivée d'ordre n de $F = \dfrac{1}{X(X^2+1)}$

Exercice de TD : 5

($*$)

1. Décomposer la fraction $F = \dfrac{1}{(X-1)^3(X+1)^3}$ en éléments simples.
2. En déduire deux polynômes U et V tels que $(X+1)^3U + (X-1)^3V = 1$

Exercice de TD : 6

(♡) Calculer l'intégrale suivante : $\displaystyle\int_1^2 \frac{x^4-2}{x(x+1)^2}\,\mathrm{d}x$.

Exercice de TD : 7

(♡) Déterminer la limite de la suite de terme général $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

Exercice de TD : 8

(♡) Soit f la fonction arctan.
Décomposer $f'(x)$ dans $\mathbb{C}(X)$, puis utiliser cette décomposition pour calculer explicitement $f^{(n)}(x)$.
En déduire les zéros de $f^{(n)}$.

Exercice de TD : 9

(♡) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $p \in [\![0, n-1]\!]$ et $z_1, \ldots, z_n$ des complexes non nuls deux à deux distincts. Soit $Q = \displaystyle\prod_{k=1}^{n}(X - z_k)$.

1. Déterminer la décomposition en éléments simples de $\dfrac{X^p}{Q}$.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k^p}{Q'(z_k)}$

Exercice de TD : 10

($**$) Soit un polynôme P de degré n à coefficients réels admettant n racines réelles distinctes.

1. Décomposer en éléments simples la fraction rationnelle $F = \dfrac{P'}{P}$.
2. En déduire que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P''(x)P(x) \leq P'(x)^2$.

Exercice de TD : 11

($***$) Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé à racines simples et a un nombre réel non nul.
Montrer que $P' + aP$ est aussi scindé sur $\mathbb{R}$ à racines simples.
Aide : vous pourrez étudier la fonction $x \mapsto \dfrac{P'(x)}{P(x)}$

Exercice de TD : 12

(∗∗) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré $n \geq 2$ à racines simples : $x_1, \ldots x_n$ non nulles.

Montrer que : $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{x_i.P'(x_i)} = \frac{-1}{P(0)}$.

Exercice de TD : 13

(♡♡) Soit $P \in \mathbb{C}[X]$, de degré $n \geq 2$ à racines simples : $x_1, \ldots x_n$ et $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $\deg Q \leq n-2$.

Calculer : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{Q(x_k)}{P'(x_k)}$

Exercice de TD : 14

(∗) Soient a, b c des complexes et $d = \dfrac{a+b+c}{2}$. On suppose a, b, c et d distrincts.

1. Montrer que pour tout polynôme P de $\mathbb{C}[X]$ de degré ≤ 2 on a $\dfrac{P}{(X-a)(X-b)(X-c)} = \sum \dfrac{P(a)}{(a-b)(a-c)}.\dfrac{1}{X-a}$
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\sum \frac{a^2}{(a-b)(a-c)(b+c-a)}$

Exercice de TD : 15

(∗∗) Calculer $\displaystyle\sum_{k=1}^{4} \frac{z_k^3+2}{(z_k^2-1)^2}$ où $z_1, \ldots, z_4$ sont les racines complexes de $P = X^4 - X^3 + 1$.

On pensera à utiliser la DES de P'/P.

Exercice de TD : 16

(∗∗) Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $P_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} (k+1)X^k$.

Montrer que P_n admet une racine dans $\mathbb{Q}\backslash]1,\ 2]$.

On pensera à transformer l'expression de P_n et on pourra envisager de tester la valeur $x_0 = 1 + \frac{1}{n}$.