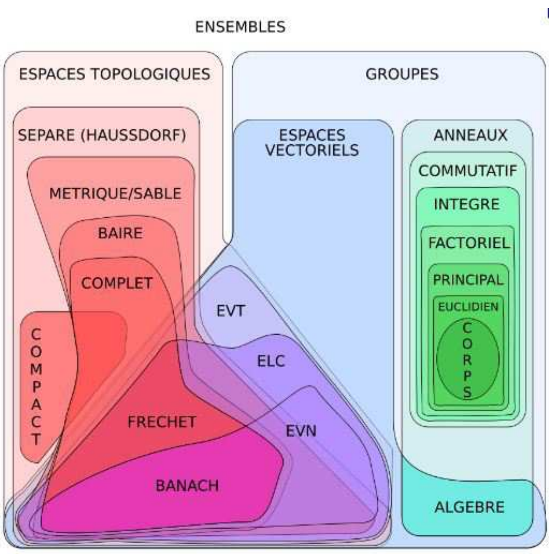
Les espaces vectoriels
Partie 1

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

10 mai 2017



1 Définition d'un Espace Vectoriel

Soit $(\mathbb{K}, +, \times)$ un corps commutatif (le programme impose $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$).

Définition 1 :
On appelle *espace vectoriel sur le corps* $\mathbb{K}$ tout ensemble E muni :
- d'une loi de composition interne : " + "
- d'une loi de composition *externe* : "." de $\mathbb{K} \times E$ dans E

que l'on pourra donc noter $(E,\ +,\ .)$ et vérifiant :

1. $(E, +)$ est un groupe commutatif
2. $\forall(\lambda,\ \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $\forall(x,\ y) \in E^2$: $\begin{cases} (\lambda+\mu)\cdot x = \lambda\cdot x + \mu\cdot x \\ \lambda\cdot(x+y) = \lambda\cdot x + \lambda\cdot y \\ (\lambda\times\mu)\cdot x = \lambda\cdot(\mu\cdot x) \\ 1_{\mathbb{K}}\cdot x = x \end{cases}$

Remarque 1. Si E est un espace vectoriel sur le corps $\mathbb{K}$,
— on dira que E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et que $\mathbb{K}$ est *le corps de base* de E.

— les éléments de E s'appellent les *vecteurs* et les éléments de $\mathbb{K}$ les *scalaires*.
— l'élément neutre pour $+$, est noté 0_E et s'appelle le *vecteur nul*.

Exercice : 1

$(*)$ Soit E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel.
On munit le produit cartésien $E \times E$ de l'addition usuelle et de la multiplication externe par les complexes définie par : $(a+ib).(x,\ y) = (ax - by,\ ay + bx)$.
Montrer que $E \times E$ est alors un $\mathbb{C}$-espace vectoriel. Celui-ci est appelé complexifié de E.

Remarque 2. Cette première méthode (utilisation de la définition) pour démontrer qu'un ensemble est un espace vectoriel ne sera appliquée que dans des cas exceptionnels (comme par exemple dans le cours, pour déterminer les Espaces Vectoriels de base).

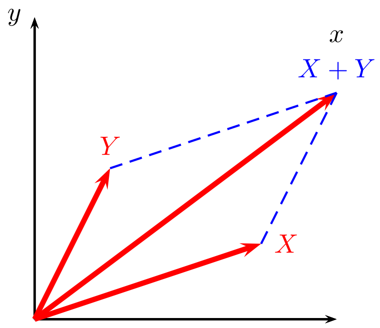
`Exemple 1.` Premiers EV de base :

1. Un corps $\mathbb{K}$ peut être considéré comme un espace vectoriel sur lui-même.
   On peut en effet définir une loi externe "." en posant pour $\lambda \in \mathbb{K}$ et $x \in \mathbb{K}$, $\lambda \cdot x = \lambda \times x$.
   Muni de $+$ et $\cdot$, $\mathbb{K}$ a alors une structure de $\mathbb{K}$-ev.

2. $\mathbb{C}$ peut être considéré comme un $\mathbb{C}$-ev ou un $\mathbb{R}$-ev.

3. $\mathbb{K}[X]$ est un $\mathbb{K}$-ev.

4. $\mathbb{R}^2$ peut-être considéré comme un $\mathbb{R}$-ev.
   Soit $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ et $E = \mathbb{R}^2$. On définit :
   (a) l'addition de deux vecteurs $X = (x_1,\ x_2)$, $Y = (y_1,\ y_2)$ par $X + Y = (x_1 + y_1,\ x_2 + y_2)$.
   (b) la multiplication d'un vecteur $X = (x_1,\ x_2)$ par un scalaire $\lambda \in \mathbb{R}$ par $\lambda \cdot X = (\lambda x_1, \lambda x_2)$.
   Muni de ces deux lois, $\mathbb{R}^2$ a une structure de $\mathbb{R}$-ev.
   On peut représenter un vecteur $X = (x_1,\ x_2)$ de $\mathbb{R}^2$ par une flèche joignant le point $(0,\ 0)$ au point $(x_1,\ x_2)$.
   L'addition de deux vecteurs s'obtient alors de façon usuelle (en traçant un parallélogramme).



Proposition 1 : Espace produit
Soit $\mathbb{K}$ un corps commutatif et $E_1,\ \dots,\ E_n$ des $\mathbb{K}$-ev.

On définit sur $E_1 \times \dots \times E_n$ les lois : $\left\{ \begin{array}{l} (x_1,\ \dots,\ x_n) + (y_1,\ \dots,\ y_n) = (x_1 + y_1,\ \dots,\ x_n + y_n) \\ \lambda \cdot (x_1,\ \dots,\ x_n) = (\lambda \cdot x_1,\ \dots,\ \lambda \cdot x_n) \end{array} \right.$

$(E_1 \times \dots \times E_n,\ +,\ \cdot)$ est alors un $\mathbb{K}$-ev de vecteur nul $(0_{E_1},\ \dots,\ 0_{E_n})$.

Preuve 1 : Conséquence immédiate du fait que $E_1 \dots E_n$ sont des $\mathbb{K}$-ev.

Remarque 3. Remarquez que dans la définition précédente :

1. les ev $E_1 \dots E_n$ ont tous le même corps de base $\mathbb{K}$.
2. Les lois sont toutes notées $\left\{ \begin{array}{l} "+" \\ "." \end{array} \right.$ alors qu'elles ne correspondent pas nécessairement à la même lci.

En particulier, $\mathbb{R}^n$ est un $\mathbb{R}$-ev et $\mathbb{C}^n$ peut être considéré soit comme un $\mathbb{C}$-ev, soit comme un $\mathbb{R}$-ev.

Proposition 2 : **Espaces de fonctions**
Soit A un *ensemble* non vide et E un $\mathbb{K}$-ev.
On note $\mathcal{F}(A,\ E)$ l'ensemble des fonctions de A vers E.

On définit alors deux lois sur $\mathcal{F}(A,E)$: $\left\{\begin{array}{lll} \forall (f,\ g)\in\mathcal{F}(A,\ E)\ : & (f+g)\ : & \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & f(x)+g(x)\end{array} \\ \\ \forall f\in\mathcal{F}(A,\ E),\ \forall\lambda\in\mathbb{K}\ : & \lambda\cdot f\ : & \begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & \lambda\cdot f(x)\end{array}\end{array}\right.$

Alors $\Big(\mathcal{F}(A,\ E),+,\cdot\Big)$ est un $\mathbb{K}$-ev.

Preuve 2 : Conséquence immédiate du fait que E est un $\mathbb{K}$-ev.

`Exemple 2.` Ainsi, lorsque $I\subset\mathbb{R}$, $(\mathcal{F}(I,\ \mathbb{R}),\ +,\ .)$ est un $\mathbb{R}$-ev.

Corollaire 3 : **Espace de suites**
Soit E est un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.
L'ensemble des suites à valeurs dans E, muni des lois $+$ et $\cdot$ est également un $\mathbb{K}$-espace vectoriel $\big(\mathcal{S}(E),+,\cdot\big)$.

Preuve 3 :
1. L'ensemble des suites à valeurs dans E est $\mathcal{F}(\mathbb{N},\ E)$ où E est un $\mathbb{K}$-ev.
2. L'addition des suites et la multiplication d'une suite par un scalaire correspondent à la lci et la lce définies dans la proposition précédente.

Remarque 4. Ainsi, $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ +,\ .)$ est un $\mathbb{R}$-ev tandis que $(\mathbb{C}^{\mathbb{N}},\ +,\ .)$ peut-être considéré comme un $\mathbb{R}$ ou un $\mathbb{C}$-ev.

Proposition 4 : **Règles de calcul dans un ev**
Pour tout $(\lambda,\ \mu)$ dans $\mathbb{K}^2$ et tout $(x,\ y)$ dans E^2, on a :

1. $0_{\mathbb{K}}.x=0_E$
2. $\lambda\cdot 0_E=0_E$
3. $(\lambda\cdot x)=0_E\Longleftrightarrow(\lambda=0_K$ ou $x=0_E)$
4. $(-\lambda)\cdot x=-(\lambda\cdot x)=\lambda\cdot(-x)$
5. $\lambda\cdot(x-y)=\lambda\cdot x-\lambda\cdot y$
6. $(\lambda-\mu)\cdot x=\lambda\cdot x-\mu\cdot x$

Preuve 4 :
1. $0_{\mathbb{K}}.x=(0_{\mathbb{K}}+0_{\mathbb{K}}).x=0_{\mathbb{K}}.x+0_{\mathbb{K}}.x\ \ldots$
2. $\lambda.0_E=\lambda.(0_{\mathbb{K}}.x)=(\lambda.0_{\mathbb{K}}).x=0_{\mathbb{K}}.x=0_E$
3. Si $\lambda\neq 0_{\mathbb{K}}$ alors $\lambda.x=0_E\Longleftrightarrow\lambda^{-1}.(\lambda.x)=\lambda^{-1}.0_E\Longleftrightarrow x=0_E$
4. $\lambda.x+(-\lambda)\cdot x=(\lambda-\lambda).x=0_E$ donc $(-\lambda)\cdot x=-(\lambda.x)$
   $\lambda.x+\lambda\cdot(-x)=\lambda.(x-x)=0_E$ donc $(\lambda)\cdot(-x)=-(\lambda.x)$
5. Conséquence immédiate des résultats précédents.
6. Conséquence immédiate des résultats précédents.

Remarque 5.
1. On écrira désormais λx à la place de $\lambda.x$ lorsque la confusion ne sera plus à craindre.
2. On pourra écrire $-\lambda x$ sans aucune ambiguïté.

Définition 2 : **Famille d'éléments d'un ensemble**
Soit A et I deux ensembles non vides.
Une famille d'éléments de A indéxée sur I est une application de I dans A que l'on pourra noter : $(a_i)_{i\in I}$.
Lorsque $I=[\![1,n]\!]$ avec $n\in\mathbb{N}^*$, on pourra considérer la famille $(a_i)_{i\in[\![1,n]\!]}$ comme ordonnée.

Définition 3 : **Famille presque nulle de scalaires**
Soit $(\lambda_i)_{i\in I}$ une famille de scalaires de $\mathbb{K}$.
On dira que cette famille est *presque nulle* lorsque seul un nombre fini de λ_i est non nul.
L'ensemble des familles presque nulles indexées sur I de scalaires est noté : $\mathbb{K}^{(I)}$

DÉFINITION 4 : **Combinaison linéaire de vecteurs**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.

1. Combinaison linéaire d'une famille finie de vecteurs :
   Soit $(x_1,\ \dots,\ x_n)$ une famille finie de vecteurs de E.
   On appelle *combinaison linéaire* de ces vecteurs toute expression de la forme :
$$\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \quad \text{où} \quad \forall i \in [\![1, n]\!], \lambda_i \in \mathbb{K}$$
2. Combinaison linéaire d'une famille de vecteurs :
   Soit I un ensemble non vide et $(x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
   On appelle *combinaison linéaire* de ces vecteurs toute expression de la forme :
$$\sum_{i\in I} \lambda_i x_i \quad \text{où} \quad (\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$$

PROPOSITION 5 : **Stabilité par combinaison linéaire**
Un $\mathbb{K}$-ev E est stable par combinaison linéaire.
En d'autres termes :
$$\begin{cases} \forall (\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)} \\ \forall (x_i) \in E^I \end{cases}, \quad \sum_{i\in I} \lambda_i x_i \in E$$

Preuve 5 : Par récurrence sur le nombre de scalaires non nuls.

2 Sous-espaces vectoriels

2.1 Définition et caractérisation

DÉFINITION 5 : **Sous-espace vectoriel d'un $\mathbb{K}$-ev**
Soit $(E, +, \cdot)$ un $\mathbb{K}$-ev et $F \subset E$ une partie de E.
On dit que F (muni des lois de E restreintes à F) est un sous-espace vectoriel (sev) de E ssi F est un $\mathbb{K}$-ev.

THÉORÈME FONDAMENTAL 6 : **Caractérisation des sous-espaces vectoriels**
Soit F un ensemble et E un $\mathbb{K}$-ev.
$$F \text{ sev de } E \iff \begin{cases} F \subset E \\ 0_E \in F \\ \forall (x,\ y) \in F^2,\ \forall (\lambda,\ \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \boxed{\lambda x + \mu y \in F} \quad (\textit{Stabilité par CL}) \end{cases}$$

Preuve 6 :

- $\Rightarrow$ Soit F un sev de E. F étant stable par la lci et la lce, F est donc stable par combinaisons linéaires.
- $\Leftarrow$ Il suffit de vérifier que $(F,\ +)$ est un groupe commutatif et que F est stable par la lce.
  F étant un sous ensemble de E, les 4 propriétés de la lce sont automatiquement vérifiées.

Remarque 6. La troisième propriété est équivalente à dire que F est *stable par combinaisons linéaires.*

Remarque 7. IMPORTANT !
Si F est un sous-espace vectoriel de E, alors on a nécessairement $0_E \in F$.
En d'autres termes, si $0_E \notin F$ alors F n'est pas un sev de E. (Intéressant à retenir !!)

Deuxième Méthode
Pour démontrer qu'un ensemble F est un $\mathbb{K}$-ev, on prouvera dans la mesure du possible, que c'est un sev d'un $\mathbb{K}$-ev connu E. Il faudra donc vérifier les 3 points suivants :

1. $F \subset E$
2. F est non vide (on prouvera par exemple que $0_E \in F$)
3. $\forall (x,\ y) \in F^2,\ \forall (\lambda,\ \mu) \in \mathbb{K}^2, \quad \lambda x + \mu y \in F$

`Exemple 3.`

1. Si E est un espace vectoriel, alors $\{0_E\}$ est un sev de E (appelé l'espace nul) et E est un sev de E.
2. $\mathbb{K}_n[X]$ est un sev de $\mathbb{K}[X]$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont
   (a) $\{0\}$, $\mathbb{R}^2$
   (b) les droites vectorielles : $F_1 = \{\lambda(x_0,\ y_0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
4. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^3$ sont :
   (a) $\{0\}$, $\mathbb{R}^3$
   (b) les droites vectorielles : $F_1 = \{\lambda(x_0,\ y_0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$
   (c) les plans vectoriels : $F_2 = \{\lambda(x_0,\ y_0,\ z_0) + \mu(x_1,\ y_1,\ z_1) \mid \lambda,\ \mu \in \mathbb{R}\}$

`Exemple 4.` Soit l l'ensemble des suites réelles convergeant vers 0. Vérifiez qu'il s'agit d'un $\mathbb{R}$-ev.

Exercice : 2

$(*)$ Parmi les ensembles suivants, lesquels sont des sev de l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$?

1. $F = \mathcal{C}^n(\mathbb{R})$
2. $F = \{f \in E \mid f(1) = 2f(0)\}$
3. $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) + 1\}$
4. $F = \{f \in E \mid \forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = f(1-x)\}$
5. $F = \{f \in E \mid f$ dérivable et $\exists a \in E$ telle que $\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = a(x)f(x)\}$

Exercice : 3

$(*)$ Prouver que l'ensemble des suites réelles presque nulles (qui s'annulent à partir d'un certain rang) est un $\mathbb{R}$-ev.

Théorème 7 : **L'intersection de sev est un sev**
Soit I un ensemble non vide.
Soit $(F_i)_{i\in I}$ une famille (finie ou infinie) de sev de E un $\mathbb{K}$-ev. Alors : $\boxed{\bigcap\limits_{i\in I} F_i \text{ est un sev de } E}$.

Preuve 7 : On utilise la caractérisation usuelle des sev.

1. $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ est bien une partie non vide de E.
2. Soient x et y deux vecteurs de $\bigcap\limits_{i\in I} F_i$ et λ et μ deux scalaires.
   $\forall i \in I$, on a $(x,\ y) \in F_i^2$ et comme F_i est un sev de E, alors $\lambda.x + \mu.y \in F_i$ et donc $\lambda.x + \mu.y \in \bigcap\limits_{i\in I} F_i$.

`Exemple 5.` Montrer que $\mathcal{C}^n(I,\ \mathbb{R})$ et $\mathcal{C}^\infty(I,\ \mathbb{R})$ sont des $\mathbb{R}$-ev.

Exercice : 4

$(**)$ Soient F et G deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E.
Montrer que $F \cup G$ est un sev de E si et seulement si $F \subset G$ ou $G \subset F$.

2.2 Sev engendré par une partie de E

Définition 6 : **Sev engendré par une partie** A
Soit $A \neq \emptyset$ une partie d'un $\mathbb{K}$-ev E.
L'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de A est un sev de E noté $\mathrm{Vect}(A)$.

$$\mathrm{Vect}(A) = \{\sum_{i\in I} \lambda_i a_i \quad \mid \quad (\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)} \text{ et } (a_i) \in A^I\}$$

Remarque 8.

1. On démontre facilement que $\mathrm{Vect}(A)$ est le plus petit (au sens de l'inclusion) sev de E contenant A et que c'est aussi l'intersection de tous les sev de E contenant A.
2. Par convention, on dira que $\mathrm{Vect}(\emptyset) = \{0_E\}$.

Troisième Méthode A PRIVILIGIER par rapport à la "Caractérisation" !

Pour montrer que F est un sev de E, on pourra envisager de montrer que $F = \text{Vect}(A)$ avec $A \subset E$.
Cette méthode sera particulièrement utile lorsqu'on cherchera à déterminer une base de F.

`Exemple 6.` Montrer ainsi que $\{(x+y,\ -2y,\ x-y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$ est un sev de $\mathbb{R}^3$.

Remarque 9.

1. Droite vectorielle :
   Si $x_0 \in E\backslash\{0\}$ alors le sev $\text{Vect}(\{x_0\})$ (noté aussi $\text{Vect}(x_0)$) est appelé "une droite vectorielle" de E.
2. Plan vectoriel :
   Si x_0 et x_1 sont deux vecteurs non colinéaires de E, alors le sev $\text{Vect}(\{x_0,\ x_1\})$ (noté aussi $\text{Vect}(x_0,\ x_1)$) est appelé "un plan vectoriel" de E.

Droites et plans vectoriels :

`Exemple 7.` $(*)$ Déterminer une équation cartésienne du plan vectoriel de $\mathbb{R}^3$ engendré par les vecteurs $\begin{cases} x_0 = (1,\ 2,\ 0) \\ x_1 = (0,\ -1,\ 3) \end{cases}$.

Remarque 10. Quelques constatations utiles :

1. Si A et B sont deux parties de E telles que $A \subset B$, alors $\text{Vect}(A) \subset \text{Vect}(B)$.
2. Si F est un sev de E alors $\text{Vect}(F) = F$.
   On a donc en particulier : $\text{Vect}\big(\text{Vect}(A)\big) = \text{Vect}(A)$.

Exercice : 5

$(**)$ Dans l'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on définit pour $n \in \mathbb{N}$ la suite : $e_n = (0,\ 0,\ \dots,\ 0,\ 1,\ 0\dots)$
Tous les termes de la suite e_n sont nuls sauf le nième qui vaut 1.
Déterminer le sev engendré par la partie $A = \{e_n \mid n \in \mathbb{N}^*\}$.

2.3 Sev supplémentaires

Définition 7 : **Somme de deux sev**
Soient F_1 et F_2 deux sev d'un $\mathbb{K}$-ev E. On appelle *somme* de F_1 et F_2 l'ensemble :

$$F_1 + F_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_1 \in F_1,\ x_2 \in F_2\}$$

Remarque 11.

1. On peut de la même façon, définir la somme de n sev de E.
2. Si $A,\ B \in \mathcal{P}(E)$, montrer que $\text{Vect}(A \cup B) = \text{Vect}(A) + \text{Vect}(B)$.

Théorème 8 : **Autre définition de $F_1 + F_2$**

$$F_1 + F_2 = \text{Vect}(F_1 \cup F_2)$$

$F_1 + F_2$ est donc un sev de E

Preuve 8 : Par double inclusion.

Exercice : 6

(∗) Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les parties $F = \{(x,\ 0,\ 0)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$ et $G = \{(x,\ x,\ 0)\ ;\ x \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que ce sont des sev et déterminer le sous espace $F + G$.

Définition 8 : **Somme directe** $F_1 \oplus F_2$
Soient deux sev F_1, F_2 de l'espace vectoriel E.
le sev $F_1 + F_2$ est noté $F_1 \oplus F_2$ lorsque $\forall x \in F_1 + F_2$, x s'écrit de façon $\boxed{\textit{unique}}$ $x = x_1 + x_2$ avec $\begin{cases} x_1 \in F_1 \\ x_2 \in F_2 \end{cases}$.
Dans ce cas, on dit que "*F_1 et F_2 sont en somme directe*" ou que *la somme $F_1 + F_2$ est directe.*

Théorème Fondamental 9 : **Caractérisation d'une somme directe**
Soient deux sous-espaces vectoriels F_1 et F_2 d'un espace vectoriel E.
On a la caractérisation suivante d'une somme directe :

On a : $\boxed{\text{La somme } F_1 + F_2 \text{ est directe} \iff F_1 \cap F_2 = \{0_E\}}$

Preuve 9 :
$\Rightarrow$ Soit $x \in F_1 \cap F_2$. On montre facilement que $x = 0$
$\Leftarrow$ Soit $x \in F_1 + F_2$. Supposons que $\begin{cases} x = x_1 + x_2 \\ x = x_1' + x_2' \end{cases}$. On montre facilement que $x_1 = x_1'$ et que $x_2 = x_2'$.

Remarque 12. En d'autres termes, tout élément de $F_1 + F_2$ se décompose de façon unique comme somme d'un élément de F_1 et d'un élément de F_2 si et seulement si $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$.

Il y a donc 2 façons de prouver que F_1 et F_2 sont en somme directe :
1. Soit on prouve que tout vecteur de $F_1 + F_2$ se décompose de façon unique comme somme d'un vecteur de F_1 et d'un vecteur de F_2 (souvent utilisé dans les raisonnements par Analyse / Synthèse)
2. Soit on prouve que $F_1 \cap F_2 = \{0_E\}$

`Exemple 8.` Les deux sev $F = \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$ et $G = \text{Vect}(\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix})$ de $\mathbb{R}^3$ sont-ils en somme directe ?

Définition 9 : **Sous-espaces supplémentaires**
On dit que F_1 et F_2 sont deux sous-espaces supplémentaires d'un espace vectoriel E si et seulement si :

$$E = F_1 \oplus F_2$$

Cela signifie que tout vecteur de E s'écrit de façon $\boxed{\textbf{unique}}$ sous la forme $x = x_1 + x_2$ avec $\begin{cases} x_1 \in F_1 \\ x_2 \in F_2 \end{cases}$

Pour montrer que $E = F_1 \oplus F_2$:

Il s'agit de montrer que $\forall x \in E$, il existe un unique couple $(x_1,\ x_2) \in F1 \times F2$ tel que $x = x_1 + x_2$.
On introduit donc un $x \in E$ et on procède par analyse synthèse.

1. Analyse : Soit $(x_1,\ x_2) \in F1 \times F2$ tel que $x = x_1 + x_2$, alors : ...
   On détermine en général ainsi un unique couple $(x_1,\ x_2)$ qui peut convenir.
2. Synthèse : On vérifie alors que $(x_1,\ x_2) \in F1 \times F2$ et que $x = x_1 + x_2$.

Si l'analyse n'a exceptionnellement pas abouti à l'unicité, on montre alors que $F_1 \cap F_2 = \{0\}$.

Exercice : 7

(∗) Soient $F = \{f \in \mathcal{C}([-1,\ 1],\ \mathbb{C}) \mid \displaystyle\int_{-1}^{1} f(t)\,\mathrm{d}t = 0\}$ et $G = \{f \in \mathcal{C}([-1,\ 1],\ \mathbb{C}) \mid f \text{ est constante}\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}([-1,\ 1],\ \mathbb{C})$.

Remarque 13. Ne pas confondre *supplémentaire* avec *complémentaire* :

1. Le complémentaire d'un sous-espace vectoriel n'est pas un sev (il ne contient pas le vecteur nul).
2. En général, si F et G sont supplémentaires de E, alors $F \cup G \neq E$.
3. En général, un sev admet une infinité de supplémentaires. Dire ***le*** supplémentaire d'un sev n'a donc pas de sens.
   On a par exemple : $\mathbb{R}^2 = \text{Vect}(\overrightarrow{i}) \oplus \text{Vect}(\overrightarrow{u})$ pour tout $\overrightarrow{u}$ non colinéaire à $\overrightarrow{i}$.

Complémentaire de Vect$(\overrightarrow{i})$:	Supplémentaires de Vect$(\overrightarrow{i})$:

Exercice : 8

$(*)$ Dans l'espace $E = \mathbb{R}^4$, on considère les sev : $\begin{cases} F = \text{Vect}\big((1,\ 2,\ -1,\ 0),\ (0,\ 2,\ 0,\ 1)\big) \\ G = \text{Vect}\big((2,\ 0,\ 0,\ 1),\ (1,\ 0,\ 0,\ 1)\big) \end{cases}$

Ces deux sous-espaces sont-ils supplémentaires dans E ?

Exercice : 9

$(*)$ Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ on considère $\begin{cases} \mathcal{P} \text{ l'ensemble des fonctions paires} \\ \mathcal{I} \text{ l'ensemble des fonctions impaires} \end{cases}$.

Montrer que :

$$E = \mathcal{P} \oplus \mathcal{I}$$

Exercice : 10

$(*)$ Soit $P_0 \in \mathbb{R}[X]$ non nul et $F = \{P_0 Q \mid Q \in \mathbb{R}[X]\}$.
Déterminer un supplémentaire de F.

Définition 10 : **Somme d'un nombre fini de sev**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $F_1,\ F_2,\ \dots,\ F_n$ des sev de E.
La somme $F = F_1 + \cdots + F_n$ est un sev de E défini par :

$$F_1 + \cdots + F_n = \{x_1 + \cdots + x_n \mid (x_1,\ \dots,\ x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n\}$$

On dira que cette somme est directe et on notera $F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n$ lorsque tout élément de F se décompose de façon unique comme somme d'éléments de $F_1, \dots,\ F_n$.

Proposition 10 : **Caractérisation d'une somme directe**

$$F = F_1 \oplus \cdots \oplus F_n \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x_1 + \cdots + x_n = 0_E \\ (x_1,\ \dots,\ x_n) \in F_1 \times \cdots \times F_n \end{cases} \Rightarrow \forall i \in [\![1, n]\!],\ x_i = 0_E$$

Preuve 10 : Facile

- $\Rightarrow$ Cela provient de la définition de la somme directe
- $\Leftarrow$ Méthode usuelle pour prouver une unicité

3 Familles libres, génératrices

Définition 11 : **Famille libre de vecteurs**
On dit qu'une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ est *libre* si et seulement si :

$$\forall (\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}, \quad \boxed{\sum_{i \in I} \lambda_i x_i = 0_E \ \Rightarrow\ \forall i \in I,\ \lambda_i = 0_K}$$

On dit aussi que les vecteurs de la famille sont *linéairement indépendants*.
Si $\mathcal{F}$ n'est pas libre, on dit que la famille $\mathcal{F}$ est *liée*.

Remarque 14. Une famille de deux vecteurs est libre si et seulement si ils ne sont pas proportionnels. La notion de famille libre vient donc généraliser la notion de vecteurs non proportionnels.

> Pour montrer qu'une famille est libre :
> 1. Soient $(\lambda_1,\ \dots,\ \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$ tels que $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n = 0_E$
> 2. Par implications successives, on en déduit que $\lambda_1 = \dots = \lambda_n = 0_K$ et donc que la famille est libre.

`Exemple 9.` $(*)$

1. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $x_1 = (1,\ 0,\ 2)$, $x_2 = (1,\ 1,\ 1)$ et $x_3 = (0,\ -1,\ 1)$.
   La famille $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ est-elle libre ?
2. Dans l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $x_1 = (1,\ 0,\ 2)$, $x_2 = (1,\ 1,\ 0)$ et $x_3 = (0,\ 1,\ 1)$.
   La famille $(x_1,\ x_2,\ x_3)$ est-elle libre ?

Exercice : 11

$(*)$ Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$:

1. Montrer que $(x \mapsto x^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de E
2. Montrer que $(x \mapsto e^{\alpha x})_{\alpha\in\mathbb{R}}$ est une famille libre de E

Remarque 15. Exemples de familles non libres :

1. Une famille contenant le vecteur nul n'est pas libre
2. Une famille contenant deux fois le même vecteur n'est pas libre
3. Une famille dont un vecteur est combinaison linéaire d'autres vecteurs n'est pas libre.

Exercice : 12

$(**)$ Dans l'espace $E = \mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les fonctions définies par $\forall k \in \mathbb{N},\quad f_k\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sin(kx) \end{array}$

Soit δ_{pq} le *symbole de Kronecker* défini par : $\delta_{pq} = \begin{cases} 1 & \text{si } p = q \\ 0 & \text{si } p \neq q \end{cases}$

1. Montrer $\forall (p,\ q) \in \mathbb{N}^2$, $\displaystyle\int_0^{2\pi} \sin(px)\,\sin(qx)\,\mathrm{d}x = \delta_{pq}\pi$.
2. En déduire que la famille $\mathcal{F} = (f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est libre.

> PROPOSITION 11 : Tout sous-famille non vide d'une famille libre est elle-même libre.

> *Preuve 11 :* Aucune difficulté.

> PROPOSITION 12 : **Famille de polynômes non nuls à degrés étagés**
> Toute famille de polynômes non nuls à degrés étagés (degrés distincts deux à deux) est libre.

> *Preuve 12 :* On utilise la fonction degré.

`Exemple 10.` $(*)$ Prouver que la famille de polynômes $(X^k(1-X)^n)_{k\in\mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathbb{R}[X]$.

> PROPOSITION 13 : **Caractérisation d'une famille liée**
> Soit $\mathcal{F} = (x_i)_{i\in I}$ une famille de vecteurs de E.
> La famille est liée, si et seulement si l'un des vecteurs s'exprime comme combinaison linéaire (CL) des autres vecteurs de la famille :
> $$\exists i_0 \in I \ \text{ et } \ \exists (\mu_i) \in \mathbb{K}^{(I)} \ \text{ tels que } \ \boxed{x_{i_0} = \sum_{i\in I\setminus\{i_0\}} \mu_i x_i}$$

> *Preuve 13 :*
> - $\Rightarrow$ Si $\mathcal{F} = (x_1,\ \dots,\ x_n)$ est liée, alors il exite une CL nulle avec au moins un des coefficients non nul ...
> - $\Leftarrow$ Si l'un des vecteurs est CL des autres, alors on trouve immédiatement une CL nulle avec les coefficients non tous nuls.

Remarque 16. En particulier, si l'un des vecteurs est nul ou si l'un des vecteurs de la famille apparaît plus d'une fois dans S, alors la famille est liée.

Exercice : 13

($*$) Dans l'espace $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$, on considère les deux fonctions définies par $f(x) = \cos x$ et $g(x) = \sin x$.
Montrer que la famille $(f,\ g)$ est libre.
Les trois fonctions définies par $f(x) = 1$, $g(x) = \cos^2 x$ et $h(x) = \cos 2x$ forment-elles une famille libre ?

PROPOSITION 14 : Tout sur-famille d'une famille liée est elle-même liée.

Preuve 14 : Aucune difficulté.

DÉFINITION 12 : **Famille génératrice**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev.
On dit qu'une famille $\mathcal{F} = (x_i) \in E^I$ est *génératrice* d'un sous espace vectoriel F si et seulement F est l'ensemble des combinaisons linéaires des vecteurs de la famille.
En d'autres termes :

$$\mathcal{F} \text{ est une famille génératrice de } F \quad \Longleftrightarrow \quad \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = F$$

`Exemple 11.` ($*$) Pouvez-vous donner une famille génératrice de :

1. $\mathbb{R}^2$
2. $\mathbb{K}^n$
3. $\mathbb{R}_n[X]$
4. $\mathbb{R}[X]$
5. $\mathbb{C}(X)$

Pour déterminer une famille de F sev de E, on procède en général par équivalences successives :
On prend $x \in E$.
On écrit alors que :

$$\begin{aligned} x \in F &\Longleftrightarrow \ldots \\ &\Longleftrightarrow \ldots \\ &\Longleftrightarrow \exists (\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)} \text{ tels que } x = \sum_{i \in I} \lambda_i x_i \\ &\Longleftrightarrow x \in \mathrm{Vect}((x_i)_{i \in I}) \end{aligned}$$

On a alors : $F = \mathrm{Vect}((x_i)_{i \in I})$.
Si ce raisonnement pose problème, on pourra procéder alors par Analyse/Synthèse.

`Exemple 12.` ($*$) Détermine une famille génératrice de $F = \{x \mapsto ax + b \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$.

Pour montrer qu'une famille $(x_i)_{i \in I}$ est génératrice de E, on prend $x \in E$.
Il s'agit alors de prouver qu'il existe $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n \in \mathbb{K}$ tels que $x = \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$.
On pourra :
- Soit trouver $\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n$ en procédant par équivalences successives
- Soit faire une analyse/synthèse

`Exemple 13.` ($*$) Montrer que les vecteurs $x_1 = (1,\ 1)$, $x_2 = (2,\ 3)$ et $x_3 = (1,\ 2)$ forment une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

DÉFINITION 13 : **Base**
On dit qu'une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (x_i)_{i \in I}$ est une *base* de l'espace vectoriel E si et seulement si :

1. la famille $\mathcal{F}$ est libre.
2. la famille $\mathcal{F}$ est génératrice.

THÉORÈME 15 : **Coordonnées d'un vecteur dans une base**
Soit $\mathcal{F} = (e_i)_{i \in I}$ une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev E.

$$\mathcal{F} \text{ est une base de } E \Longleftrightarrow \forall x \in E,\ x \text{ s'écrit de façon } \textit{unique} \text{ comme CL de vecteurs de } \mathcal{F}.$$

Les scalaires $(\lambda_i) \in \mathbb{K}^{(I)}$ tels que $x = \sum_{i \in I} \lambda_i e_i$ sont appelées les *coordonnées* de x dans la base $(e_i)_{i \in I}$

Preuve 15 : Pas de difficulté !

Remarque 17. Tous les espaces vectoriels n'admettent par forcément des bases. Par exemple : $\mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ ...

Méthode 1 : Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base : (autre méthode vue dans une prochaine leçon)
1. Montrons que $\mathcal{F}$ est libre ...
2. Montrons que $\mathcal{F}$ est génératrice ...

Exemple 14.
1. Les vecteurs $e_1 = (1,\ 0)$ et $e_2 = (0,\ 1)$ forment une base de $\mathbb{R}^2$.
2. Les fonctions $\begin{cases} e_1 & : x \to 1 \\ e_2 & : x \to x \\ e_3 & : x \to x^2 \end{cases}$ forment une base du $\mathbb{R}$-ev des fonctions polynômiales de degré ≤ 2.

Définition 14 : Base canonique de $\mathbb{K}^n$
Les vecteurs suivants forment une base du $\mathbb{K}$-ev $E = \mathbb{K}^n$.

$$e_1 = (1,\ 0,\ \ldots,\ 0),\ e_2 = (0,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)\ ,\ \ldots\ ,\ e_n = (0,\ \ldots,\ 0,\ 1)$$

Cette base $e = (e_1, \ldots, e_n)$ est appelée la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

Remarque 18. Dans la base canonique de $\mathbb{K}^n$, les coordonnées du vecteur $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ sont $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$. Attention, cette similitude est souvent source de confusion entre vecteur et coordonnées.

Exercice : 14
$(*)$
1. Montrer que la famille formée des vecteurs $e_1 = (1,\ 0,\ 1)$, $e_2 = (1,\ -1,\ 1)$ et $e_3 = (0,\ 1,\ 1)$ est une base de $\mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les coordonnées de $(2,\ 1\ -1)$ dans cette base.

Définition 15 : Base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$
Les vecteurs suivants forment une base du $\mathbb{K}$-ev $E = \mathbb{K}_n[X]$.

$$e_1 = 1,\ e_2 = X\ ,\ \ldots\ ,\ e_n = X^n$$

Cette base $e = (1,\ X,\ \ldots,\ X^n)$ est appelée la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque 19.
1. Dans la base canonique de $\mathbb{K}_n[X]$, les coordonnées d'un polynôme P sont les coefficients des X^k.
2. Plus généralement, $(X^k)_{k\in\mathbb{N}}$ est la base canonique de $\mathbb{K}[X]$.

Exercice : 15
$(**)$ Soit $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$ distincts et $n \in \mathbb{N}^*$.
Sachant que toutes les bases d'un même sev ont le même cardinal, montrer que la famille de polynômes $((X-\alpha)^k(X-\beta)^{n-k})_{k\in[\![0,n]\!]}$ forme une base de $\mathbb{K}_n[X]$.

Remarque 20. Lorsque $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{K}$, la famille $(1,\ X-a,\ \frac{(X-a)^2}{2!},\ \ldots,\ \frac{(X-a)^n}{n!})$ est une base de $\mathbb{K}_n[X]$. Quelles sont les coordonnées d'un polynôme $P \in \mathbb{K}_n[X]$ dans cette base ?

4 Connaissez-vous votre cours ?

Vous devez impérativement savoir répondre aux différentes questions suivantes :

	Questions	Réponses attendues
1.	Que faut-il pour définir un espace-vectoriel ?	cf cours

2.	$\mathbb{C}$ est-il un espace-vectoriel ? Si oui, quel est son corps de base ?	cf cours
3.	Savez-vous définir l'espace produit $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$?	cf cours
4.	Qu'appelle-t-on un sev ? Quelle est la caractérisation des sev ? A quoi sert-elle ?	cf cours
5.	Soit $l \in \mathbb{R}$. $\{f \in \mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R}) \mid f(x) \xrightarrow[x\to+\infty]{} l\}$ est il un sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$?	OUI si $l = 0$
6.	La réunion de 2 sev est-il un sev ? Et l'intersection de 2 sev ? Et la somme de 2 sev ?	NON-OUI-OUI
7.	Rappeler la définition utilisée en pratique pour $\text{Vect}(A)$. Quel est l'ensemble $\text{Vect}\{x \mapsto x,\ x \mapsto 1\}$ sev de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$?	cf cours L'ens. des f° affines
8.	Montrer que $F = \{(a.2^n + 3.b)_{n\in\mathbb{N}} \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$ est un $\mathbb{R}$-ev. Montrer que $G = \{(3x + y,\ x - y) \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$ est un $\mathbb{R}$-ev.	$F = \text{Vect}((2^n)_{n\in\mathbb{N}},\ (3)_{n\in\mathbb{N}})$ $G = \text{Vect}((3,\ 1),\ (1,\ -1))$
9.	Pourquoi a-t-on $\text{Vect}(\text{Vect}(A)) = \text{Vect}(A)$	cf cours
10.	Donner 2 arguments permettant de prouver qu'une somme de sev est directe.	cf cours
11.	Quand dit-on que deux sev de E sont supplémentaires ? Quelles différences y-a-t-il entre *supplémentaire* et *complémentaire* ? $\text{Vect}((1,\ 2,\ 3))$ et $\text{Vect}((4,\ 5,\ 6),\ (7,\ 8,\ 9))$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?	cf cours cf cours OUI : déterminant non nul !
12.	En général, comment procéder pour prouver que $E = F \oplus G$?	On mq $E = F + G$ par Analyse/synthèse
13.	Comment prouver qu'une famille $\{x_2,\ x_2,\ x_3\}$ est libre ?	Sq $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$ Mq $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$
14.	Pouvez-vous prouver que $\{x \mapsto x^2,\ x \mapsto \sin x\}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$?	
15.	Que signifie $\{x_2,\ x_2,\ x_3\}$ est une famille génératrice de F ?	cf cours
16.	Comment définir la notion de *base* ? Pourquoi $\{(1,\ 2),\ (-2,\ 3)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$?	cf cours

5 Exercices de TD

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs ♡ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs ♡ correspond à la difficulté des exercices.

I] Sous espaces vectoriels

Pour prouver qu'un ensemble muni d'une lci et d'une lce est un $\mathbb{K}$-ev, on utilise très rarement la définition.
En général on utilise l'une des deux techniques suivantes :

M1 : On montre que c'est un sev d'un $\mathbb{K}$-ev de référence (inclusion, non vide, stabilité par combinaison linéaire)

M2 : On montre que cet ensemble est inclus dans un $\mathbb{K}$-ev et qu'il peut s'écrire sous la forme Vect(...) (par équivalences successives).

Exercice de TD : 1

(♡) Le strict minimum à savoir faire :

1. Prouver que $H = \{(x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + t = 0\}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$ dont vous déterminerez une base.
2. Prouver que $F = \{(x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4 \mid \begin{cases} x - y + t = 0 \\ y + 2z - t = 0 \end{cases}\}$ est un sev de $\mathbb{R}^4$ dont vous déterminerez une base.
3. Déterminer la (ou les) équations cartésiennes du sev de $\mathbb{R}^4$ engendré par $\begin{cases} (1,\ -1,\ 0,\ 1) \\ (0,\ -1,\ 1,\ 0) \end{cases}$.

Exercice de TD : 2

(♡) Soit $P = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\ /\ y = x + z\}$, $D = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x = 3z \text{ et } y = 2z\}$.

1. Montrer que P et D sont des sev de $\mathbb{R}^3$.
2. Soit $P' = \text{Vect}((1,\ 0,\ 1), (0,\ 1,\ 0))$. Déterminer une équation de P'.
3. En déduire une caractéristation de $P \cap P'$.

Exercice de TD : 3

(♡) Soit F, G et H des sous-espaces vectoriels d'un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E. Montrer que :

1. $(F \cap G) + (F \cap H) \subset F \cap (G + H)$
2. $F + (G \cap H) \subset (F + G) \cap (F + H)$

Exercice de TD : 4

(♡♡) Soit E un $\mathbb{R}$-ev et F un sev de E. On pose $A = E \backslash F$.

1. Montrer que $\forall x \in F,\ \forall y \in A,\ x + y \in A$.
2. En déduire que si $F \neq E$, alors $\text{Vect}(A) = E$.

Exercice de TD : 5

(♡) Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, on considère $F = \{t \mapsto A\cos(t + \phi),\ (A, \phi) \in \mathbb{R}^2\}$.
Montrer que F est un sev de $\mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ et préciser un système générateur.

II] Somme de sev et sev supplémentaires

Il faut bien connaître :

1. la définition d'une somme de deux sev : $F + G$
2. la définition d'une somme directe de deux sev : $F \oplus G$
3. la caractérisation des sommes directes
4. la définition de "deux sev supplémentaires d'un $\mathbb{K}$-ev"

Pour prouver que deux sous-espaces vectoriels sont supplémentaires, on utilisera pour l'instant la définition et on procèdera par analyse/synthèse.

Exercice de TD : 6

($*$) Soient A, B et C des sev de E tels que : $A \cap C \subset B$, $C \subset A + B$ et $B \subset C$.
Montrer que $B = C$.

Exercice de TD : 7

(♡) Soit $P = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x + y + z = 0\}$ et $Q = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3\ /\ x - y = 0\}$.

1. Déterminez $P + Q$. Cette somme est-elle directe ?
2. Trouver un sev de Q supplémentaire de P dans $\mathbb{R}^3$.

Exercice de TD : 8

(♡) Soit $E = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$, $F = \{f \in E,\ f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E,\ \forall x \in \mathbb{R}\backslash\{0;1\},\ f(x) = 0\}$.
Montrer que F et G sont des sev supplémentaires de E.

Exercice de TD : 9

(♡) Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\ \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$.
Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$.

III] Familles libres et génératrices

1. La méthode pour montrer qu'une famille de vecteurs d'un $\mathbb{K}$-ev est une famille libre, on procède toujours de la même façon. On considère une combinaison linéaire nulle des vecteurs de cette famille et on prouve que tous les scalaires sont nuls.
2. Pour montrer qu'une famille de vecteurs $(e_1,\ \dots,\ e_p)$ est génératrice d'un sev F, on montre par double inclusion l'égalité $F = \mathrm{Vect}(e_1,\ \dots,\ e_p)$.

Exercice de TD : 10

(♡) Etude de familles de vecteurs.

1. Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}^+}$ on pose : $f(x) = x + 1$, $g(x) = \ln(x + 1)$ et $h(x) = \sqrt{x}$.
   Montrer que la famille $(f,\ g,\ h)$ est libre.
2. Dans $\mathbb{R}$ considéré comme un $\mathbb{Q}$-ev, montrer que $(1, \sqrt{2}, \sqrt{3})$ est libre.

Exercice de TD : 11

(♡) Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(a_1,\ a_2, \dots,\ a_n) \in E^n$ un système libre.
On pose : $b_1 = a_1, \quad b_2 = a_1 + a_2, \quad \dots, \quad b_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n$.
Montrer que $(b_1,\ b_2, \dots,\ b_n)$ est un système libre.

Exercice de TD : 12

(∗∗) Quel est le sev de $\mathcal{F}([a,\ b],\ \mathbb{R})$ engendré par les fonctions indicatrices des intervalles de $[a,\ b]$.

La fonction indicatrice d'un sous-ensemble A de E est la fonction $f_A : E \to \{0,\ 1\}$ définie par $\begin{cases} f_A(x) = 1 \text{ si } x \in A \\ f_A(x) = 0 \text{ si } x \notin A \end{cases}$

Exercice de TD : 13

(∗∗) Soient A et B deux polynômes de $\mathbb{R}[X]$, non constants et premiers entre eux. Soit $n \in \mathbb{N}$.
Prouver que la famille de polynômes $(A^k B^{n-k})_{k \in [\![0,n]\!]}$ est libre.
Aide : On pourra procéder par l'absurde.

Exercice de TD : 14

(♡♡) Montrer que $(x \mapsto \cos(\lambda x))_{\lambda \in \mathbb{R}^+}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$.
Aide : On pourra procéder par récurrence sur le nombre de termes dans la combinaison linéaire nulle.

Exercice de TD : 15

(♡♡) Montrer que $(x \mapsto |x - n|)_{n \in \mathbb{N}}$ est une famille libre de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$.
Aide : On pourra prendre des valeurs de x dans des intervalles bien choisis ou utiliser la dérivabilité.