Les Applications Linéaires
Partie 1

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

10 mai 2017

1 Définition et propriétés

1.1 L'ensemble des Applications Linéaires

Définition 1 : **Application linéaire**

Soit $u : E \mapsto F$ une application.

On dit que u est *linéaire* ssi :

1.	E et F	sont	2 ev	sur $\boxed{\text{le } \textit{même} \text{ corps } \mathbb{K}}$
2.	$\forall (x,\ y) \in E^2,$	$u(x+y)$	$=$	$u(x) + u(y)$
3.	$\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{K},$	$u(\lambda x)$	$=$	$\lambda u(x)$

On note $\begin{cases} \mathrm{L}(E, F) \text{ l'ensemble des applications linéaires de } E \text{ dans } F \\ \mathrm{L}(E) \text{ l'ensemble des applications linéaires de } E \text{ dans } E \end{cases}$.

Remarque 1. Remarquons que si u est linéaire, alors $u(0_E) = 0_F$.
Ainsi, si u vérifie $u(0_E) \neq 0_F$, alors u ne peut pas être linéaire.

Proposition 1 : **Caractérisation des applications linéaires**

$$u \in \mathcal{F}(E,\ F) \text{ est linéaire ssi : } \begin{cases} E \text{ et } F \text{ sont deux ev sur le même corps } \mathbb{K} \\ \forall x,\ y \in E,\ \forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{K}, \quad \boxed{u(\lambda x + \mu y) = \lambda u(x) + \mu u(y)} \end{cases}$$

Preuve 1 : Pas de difficulté !

`Exemple 1.` $(*)$ Faire la liste des propriétés de linéarité vues depuis le début de l'année et justifier la qualification "linéaire".

`Exemple 2.` $(*)$ Les applications entre $\mathbb{R}$-ev suivantes sont-elles linéaires ?

1. $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(x,\ y,\ z) = x + y + 2z$
2. $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(x,\ y) = xy$
3. $f : \mathbb{R}^2 \mapsto \mathbb{R}$ telle que $f(x,\ y) = x + y + 1$
4. $f : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^2$ telle que $f(x,\ y,\ z) = (x - z,\ y)$

Exercice : 1

($*$) Montrer que les applications suivantes sont linéaires :

1. $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0,1],\ \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x \end{array}$
2. $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P' + 3P(X-1) \end{array}$

⚠ ⚠ ⚠ ⚠

Certains élèves confondent *la caractérisation des sev* et *la preuve qu'une application est linéaire* ! !
On rappelle donc ici que :

1. La caractérisation des sev se montre en prouvant la STABILITE par combinaison linéaire :
$$\left\{ \begin{array}{l} x,\ y \in F \\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{K} \end{array} \right. \Rightarrow \lambda x + \mu y \in F$$
2. On prouve qu'une application $f \in \mathcal{F}(E,\ F)$ est linéaire en montrant que :
$$\left\{ \begin{array}{l} \forall x,\ y \in F \\ \forall \lambda,\ \mu \in \mathbb{K} \end{array} \right. , \quad f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$$

Vous pourrez constater que ces 2 résultats n'ont absolument rien à voir...

Exercice : 2

($*$)

1. Déterminer toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}$ vers $\mathbb{R}$.
2. Déterminer toutes les applications linéaires de $\mathbb{R}^2$ vers $\mathbb{R}$. Pouvez-vous envisager une généralisation ?

Définition 2 : **forme linéaire, endomorphisme, Isomorphisme, automorphisme**
Soient E, F deux $\mathbb{K}$-ev.

1.	Une *forme linéaire* de E	est une application linéaire	$u : E \mapsto \mathbb{K}$.	
2.	Un *endomorphisme* de E	est une application linéaire	$u : E \mapsto E$.	
3.	Un *isomorphisme* de E vers F	est une application linéaire	$u : E \mapsto F$	*bijective.*
3.	Un *automorphisme* de E	est une application linéaire	$u : E \mapsto E$	*bijective.*

Remarque 2. NOTATIONS :

1. On note $L(E) = L(E,\ E)$ l'ensemble des endomorphismes de E.
2. On note $\mathrm{GL}(E)$ l'ensemble des automorphismes de E.
3. On note $\mathcal{L}(E,\ \mathbb{K})$ ou encore E^* l'ensemble des formes linéaires de E.

Théorème 2 : $(\mathrm{GL}(E), \circ)$ est un groupe.
C'est pour cette raison qu'on l'appelle le *Groupe Linéaire.*

Preuve 2 : Aucune difficulté en montrant que c'est un sous-groupe de $(\mathcal{B}(E,\ E), \circ)$.

Remarque 3.

1. Ainsi : l'inverse d'un isomorphisme est un isomorphisme.
2. Plus généralement : la composée d'applications linéaires est une application linéaire.
3. La composition des applications est bilinéaire : $\left\{ \begin{array}{l} (\lambda u + \mu v) \circ w = \lambda(u \circ w) + \mu(v \circ w) \\ w \circ (\lambda u + \mu v) = \lambda(w \circ u) + \mu(w \circ v) \end{array} \right.$

Exercice : 3

$(*)$ Soient $(u,\ v) \in L(\mathbb{R}^2)^2$ définies par : $u\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,\ y) & \mapsto & (0,\ x) \end{array}$ *et* $v\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,\ y) & \mapsto & (y,\ 0) \end{array}$

Déterminer $\left\{ \begin{array}{l} u \circ v \\ v \circ u \end{array} \right.$, et vérifier que ces deux applications appartiennent bien à L($\mathbb{R}^2$).

`Exemple 3.` $(*)$ Montrer que $f\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,\ y) & \mapsto & (x+y,\ x-y) \end{array}$ est un automorphisme de $\mathbb{R}^2$. Déterminer f^{-1}.

Théorème 3 : $L(E,\ F)$ **est un espace vectoriel**
L'ensemble des applications linéaires d'un $\mathbb{K}$-ev E vers un $\mathbb{K}$-ev F, muni de l'addition et de la multiplication par un scalaire usuelles est un $\mathbb{K}$-ev.

$$\boxed{\big(L(E,\ F), +, \cdot\big) \text{ est un } \mathbb{K}\text{-ev}}$$

Preuve 3 : On montre que c'est un sev de l'ev des applications de E dans F (muni de + et .).

1. $L(E,\ F)$ est une partie non vide de $\mathcal{F}(E,\ F)$
2. $L(E,\ F)$ est stable par CL

Remarque 4. Nous avons vu que la somme, la composée et la multiplication d'une application linéaire par un scalaire est une application linéaire. Pensez-vous que le produit de deux applications linéaires soit linéaire ?.

1.2 Construction d'une application linéaire

Théorème 4 : **Une application linéaire est déterminée par l'image d'une base**
Soit $e = (e_1,\ \ldots,\ e_n)$ une *base* de E.
Si u est linéaire, les images des vecteurs e_i suffisent pour caractériser complètement l'application u.

Preuve 4 : Analyse : Soit $u \in \mathcal{L}(E,\ F)$ telle que $\forall i \in I, \quad u(e_i) = f_i$.
On montre que l'image d'un $x \in E$ quelconque est alors parfaitement déterminée.
Synthèse : On montre que l'application trouvée est bien linéaire de E dans F.

Remarque 5. Le théorème précédent est important. Il dit en particulier que pour déterminer une application linéaire, il suffit de donner l'image d'une base par cette application.

`Exemple 4.`

1. Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ \ldots,\ e_n)$ une base d'un ev E. Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ définie par $\forall i \in [\![1, n]\!]$, $\varphi(e_i) = i$.
   Soit $x \in E$ et $(x_1,\ \ldots,\ x_n)$ les coordonnées de x dans $\mathcal{B}$.
   Déterminer l'expression de $\varphi(x)$ en fonction des coordonnées x_i.
2. Soit f l'application linéaire de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^4$ définie par : $\left\{ \begin{array}{l} f((1,\ 0,\ 0)) = (2,\ 0,\ -1,\ 0) \\ f((0,\ 1,\ 0)) = (0,\ 1,\ 2,\ 0) \\ f((0,\ 0,\ 1)) = (1,\ 1,\ 1,\ 1) \end{array} \right.$.
   Soit X un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^3$. On note $X = (x,\ y,\ z)$ et $f(X) = (x',\ y',\ z',\ t')$.
   Déterminer $x',\ y',\ z',\ t'$ en fonction de $x,\ y,\ z$.

Théorème Fondamental 5 : **Une application linéaire est définie par ses restrictions à une somme directe**
Soit $u \in \mathcal{L}(E,\ F)$ telle que le $\mathbb{K}$-ev E s'écrive : $E = E_1 \oplus \cdots \oplus E_p$ avec $(E_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ des sev de E.
Soit $(u_i)_{i\in[\![1,p]\!]}$ une famille d'applications linéaires de E_i dans F.
Alors :

Il existe une unique application linéaire u telle que : $\quad \forall i \in [\![1, p]\!], \quad u_{|E_i} = u_i$

Preuve 5 : Pas de difficulté par analyse/synthèse.

Remarque 6. En d'autres termes, si on connaît les images des éléments des E_i par une application linéaire f, alors il est possible de déterminer l'image par f de n'importe quel vecteur de E.

1.3 Noyau et Image

1.3.1 Image directe et image réciproque

Définition 3 : **Image directe et image réciproque**
Soit $f \in \mathcal{F}(A,\ B)$.

1. Soit $I \subset A$ un ensemble nom vide.
   L'image directe de I par l'application f est l'ensemble défini par :
   $$f(I) = \{f(x) \mid x \in I\}$$
2. Soit $J \subset B$ un ensemble nom vide.
   L'image réciproque de J par l'application f est l'ensemble défini par :
   $$f^{-1}(J) = \{x \in A \mid f(x) \in J\}$$

Image directe	Image réciproque

Remarque 7. Commentaires sur la notation f^{-1}.

1. Rappelons que la notation $f^{-1}(y)$ où y est un élément de l'ensemble d'arrivée, n'a de sens que lorsque f est une application bijective. $f^{-1}(y)$ représente alors l'unique antécédent de y par f.
2. En revanche, la notation $f^{-1}(J)$ a toujours un sens dès lors que J est un sous-ensemble non vide de l'ensemble d'arrivée.
   On pourra donc par exemple écrire $f^{-1}(\{y\})$ qui représente l'ensemble des antécédents de l'élément y.

Théorème 6 : **Image directe et image réciproque d'un sev par une application linéaire**

Soit $u \in \mathrm{L}(E,\ F)$ et $\left\{ \begin{array}{l} V \text{ un sev de } E \\ W \text{ un sev de } F \end{array} \right.$. Alors : $\begin{cases} u(V) & \text{est un sev de } F. \\ u^{-1}(W) & \text{est un sev de } E. \end{cases}$

Preuve 6 :

1. On montre que $u^{-1}(W)$ est une partie non vide de E stable par CL.
2. On montre que $u(V)$ est une partie non vide de F stable par CL.

`Exemple 5.` Les sev de $\mathbb{R}^3$ sont $\{0\}$, les droites vectorielles, les plans vectoriels et $\mathbb{R}^3$.
Ainsi, l'image d'un plan vectoriel par un endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ ne peut être qu'une des 4 structures précédentes.

Proposition 7 : **Image d'un sev H de famille génératrice $\mathcal{B}_H$.**
Soit $u \in \mathcal{L}(E,\ F)$ et H un sev de E de famille génératrice $(h_i)_{i \in I}$.

Le sev $u(H)$ de F est donné par : $\quad u(H) = \mathrm{Vect}(u(h_i))_{i \in I}$

Preuve 7 : Facile par équivalences successives.

`Exemple 6.` $(*)$ Choisir un sev H de $\mathbb{R}^2$, un sev K de $\mathbb{R}^3$ et une application $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2,\ \mathbb{R}^3)$.
Déterminer $f(H)$ et $f^{-1}(K)$

1.3.2 Image et Noyau

Définition 4 : **Image, noyau d'une application linéaire**
Soit $u \in \mathrm{L}(E,\ F)$. On appelle :

1. *Noyau* de u, l'ensemble : $\ker u = \{x \in E \mid u(x) = 0_F\} = u^{-1}(\{0_F\})$.
2. *Image* de u, l'ensemble : $\mathrm{Im}\, u = \{u(x) \in F \mid x \in E\} = u(E)$.

Remarque 8. $\ker u$ est un sev de E et $\mathrm{Im}\, u$ est un sev de F. $\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{u} & F \\ \cup & & \cup \\ \ker u & & \mathrm{Im}\, u \end{array}$

`Exemple 7.` $(*)$ Prouver que pour toutes applications $f,\ g \in L(E)$ on a :

1. $\ker f \subset \ker(fof)$
2. $\mathrm{Im}(fof) \subset \mathrm{Im}\, f$
3. $\mathrm{Im}(f \circ g) = f(\mathrm{Im}\, g)$

Exercice : 4
$(*)$ Soient $(u,\ v) \in L(E)^2$ deux applications linéaires vérifiant $u \circ v = 0$. Comparer $\mathrm{Im}\, v$ et $\ker u$.

Remarque 9. Quatrième Méthode
Ainsi, pour prouver qu'un sous ensemble d'un $\mathbb{K}$-ev E est un sev de E, on pourra penser à prouver qu'il s'agit de l'image ou du noyau d'une application linéaire bien choisie.

Exercice : 5
$(*)$ Montrer que $\{(x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4 \mid 2x - y + t = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$.

1.3.3 Détermination de l'image et du noyau

Détermination du noyau de $f \in \mathcal{L}(E,\ F)$
Soit $x \in E$.
Nous savons que $x \in \ker f \iff f(x) = 0$.
On détermine donc $\ker f$ en résolvant l'équation $f(x) = 0$

`Exemple 8.` $(*)$ Déterminer le noyau de l'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{K}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}[X] \\ P & \mapsto & P(X-1) - P(X) \end{array}$

`Exemple 9.` $(*)$ Déterminer le noyau de l'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,\ y) & \mapsto & (2x - y,\ y,\ 3x + y) \end{array}$

Détermination de l'image de $f \in \mathcal{L}(E,\ F)$ **(Méthode 1)**
Soit $y \in F$.
Nous savons que $y \in \mathrm{Im}\, f \iff \exists x \in E$ tel que $y = f(x)$.
On détermine donc $\mathrm{Im}\, f$ en regardant à quelle condition sur y l'équation $y = f(x)$ admet des solutions dans E

`Exemple 10.` $(*)$ Déterminer l'image de l'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,\ y) & \mapsto & (2x - y,\ y,\ 3x + y) \end{array}$

PROPOSITION 8 : **Détermination de l'image d'une application linéaire**
Soit $u \in \mathcal{L}(E,\ F)$ avec $(e_i)_{i\in I}$ une famille génératrice de E.
On a alors :

$$\operatorname{Im} u = \operatorname{Vect}(u(e_i))_{i\in I}$$

Preuve 8 : Par équivalences successives.

Détermination de l'image de $f \in \mathcal{L}(E,\ F)$ (Méthode 2)
On utilise le théorème précédent. Pour cela :

1. On détermine une famille génératrice de E
2. $\operatorname{Im} f$ est alors l'ev engendré par l'image par f de cette famille génératrice

`Exemple 11.` $(*)$ Déterminer l'image de l'application linéaire $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,\ y) & \mapsto & (2x-y,\ y,\ 3x+y) \end{array}$.
Vérifiez que l'espace vectoriel trouvé est bien le même que celui trouvé avec la méthode précédente.

`Exemple 12.` Déterminer l'image de l'application linéaire suivante : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}_2[X] \\ (a,\ b) & \mapsto & a+bX+(a-b)X^2 \end{array}$

Exercice : 6

$(*)$ Déterminer le noyau et l'image de l'application linéaire $u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,\ y,\ z) & \mapsto & (x+y-z,\ x-y+2z) \end{array}$

Exercice : 7

$(*)$ Soit le $\mathbb{R}$-ev $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$. On considère l'application : $D : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ f & \mapsto & f' \end{array}$
Montrer que l'application D est un endomorphisme de E et déterminer son noyau.

1.4 Injectivité, surjectivité et bijectivité

THÉORÈME FONDAMENTAL 9 : **Injectivité et surjectivité : Caractérisation 1**
Soit une application linéaire $u : E \mapsto F$.

1. L'application u est *injective* ssi $\ker u = \{0_E\}$.
2. L'application u est *surjective* ssi $\operatorname{Im} u = F$.

Preuve 9 : Démonstrations faciles !!

`Exemple 13.` $(*)$ Les applications étudiées précédemment sont-elles injectives ? Surjectives ?

PROPOSITION 10 : **Image d'une famille libre et d'une famille génératrice**

Soit $f \in \mathcal{L}(E,\ F)$ et $\left\{ \begin{array}{l} (l_i)_{i\in I} \text{ une famille libre} \\ (g_i)_{i\in I} \text{ une famille génératrice} \end{array} \right.$ de E.

Si f est injective, alors $(f(l_i))_{i\in I}$ est une famille libre de F
Si f est sujective, alors $(f(g_i))_{i\in I}$ est une famille génératrice de F.

Preuve 10 : Démonstrations faciles !!

THÉORÈME FONDAMENTAL 11 : **Injectivité et surjectivité : Caractérisation 2**
Soit $u : E \to F$ une application linéaire et $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$ une base de E.

u injective $\iff$ $(u(e_i))_{i\in I}$ libre
u surjective $\iff$ $(u(e_i))_{i\in I}$ génératrice de F $\iff$ $F = \operatorname{Vect}(u(e_i)_{i\in I})$

Preuve 11 : Pas de difficulté.

Remarque 10. En d'autres termes, si $u \in \mathcal{L}(E,\ F)$:

1. u injective ssi l'image d'une base de E est une famille libre de F.
2. u surjective ssi l'image d'une base de E est une famille génératrice de F.

PROPOSITION 12 : **Applications Linéaires Bijectives**
Soit $u\ :\ E \to F$ une application linéaire.

$$u \text{ bijective} \quad \Longleftrightarrow \quad \text{l'image d'une base de } E \text{ est une base de } F$$

Preuve 12 : Pas de difficulté.

`Exemple 14.` Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que dire de l'application $\phi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}_{n-1}[X] \\ P & \mapsto & P' \end{array}$?

2 Les endomorphismes de E

Dans toute cette partie, E est un $\mathbb{K}$-ev.

DÉFINITION 5 : **Homothéties vectorielles**

On définit *l'identité* de E par : $\boxed{\mathrm{id}_E\ :\ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & x \end{array}}$

Soit $\alpha \in \mathbb{K}$.

On appelle *homothétie vectorielle* de rapport α l'application : $\boxed{h_\alpha\ :\ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & \alpha \cdot x \end{array}}$ $(h_\alpha = \alpha\,\mathrm{id}_E)$

Remarque 11. Les homothéties sont des endomorphismes de E.

THÉORÈME 13 : $\big(L(E),\ +,\ \circ\big)$ est un anneau (non-commutatif).

Preuve 13 :

1. $\big(L(E),\ +\big)$ est un groupe commutatif comme sous-groupe de $\big(\mathcal{F}(E,\ E), +\big)$.
2. $L(E)$ est stable par la composition
3. $\circ$ est bien associative
4. $\circ$ admet id_E pour élément neutre dans $L(E)$.
5. On vérifie facilement que $\circ$ est distributive à droite et à gauche sur la loi $+$ (grâce à la linéarité).

Remarque 12. Ayant $\left\{\begin{array}{l} \big(L(E),\ +,\ \circ\big) \text{ un anneau} \\ \big(L(E),\ +,\ .\big) \text{ un } \mathbb{K}\text{-ev} \\ (\lambda \cdot u) \circ v = u \circ (\lambda \cdot v) = \lambda \cdot (u \circ v) \end{array}\right.$, on dit que $\big(L(E), +, \circ, .\big)$ est une $\mathbb{K}$-*algèbre*.

Remarque 13. Cette $\mathbb{K}$-algèbre n'est pas commutative ni intègre.
Prouvez-le en considérant $u,\ v \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ définis par : $\left\{\begin{array}{l} u(x,\ y) = (x,\ 2x) \\ v(x,\ y) = (0,\ y) \end{array}\right.$.

Exercice : 8

$(*)$ Soit $f,\ g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que :

1. $\ker f \cap \ker g \subset \ker(f+g)$
2. $\operatorname{Im}(f+g) \subset \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$

Remarque 14. **Notation :** Dans l'anneau $\big(L(E),\ +,\ \circ\big)$, on notera : $\begin{cases} u\circ v = uv \\ u\circ u\circ\cdots\circ u = u^n \end{cases}$.

PROPOSITION 14 : **Formules**
Soient $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$ tels que $\boxed{u\circ v = v\circ u}$ (on notera $\begin{cases} uv = u\circ v \\ u^k = u\circ\cdots\circ u \end{cases}$).
On dispose alors des formules suivantes :

1) **Binôme :** $(u+v)^n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}u^k v^{n-k}$
2) **Factorisation :** $u^n - v^n = (u-v)\circ(u^{n-1}+u^{n-2}\circ v+\cdots+u\circ v^{n-2}+v^{n-1})$
3) **Cas particulier :** $\operatorname{id}-u^n = (\operatorname{id}-u)\circ(\operatorname{id}+u+u^2+\cdots+u^{n-1})$

Preuve 14 : Ces formules sont vérifiées dans tout anneau.

`Exemple 15.` $(*)$ Soit un $\mathbb{K}$-ev E et deux endomorphismes $u,\ v \in L(E)$.
1. Développer $(u+v)^2$.
2. Développer $(\operatorname{id}-u)(\operatorname{id}+u)$.
3. Si $u^2 = 0$, montrer que $(\operatorname{id}-u)$ est bijective.

Exercice : 9
$(*)$ On considère les deux endomorphismes de $E = \mathbb{R}^2$ suivants :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,\ y) & \mapsto & (y,\ 0) \end{array} \qquad \text{et} \qquad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,\ y) & \mapsto & (0,\ y) \end{array}$$

1. Calculer $u\circ v$, $v\circ u$, u^2 et v^2. Conclusion ?
2. Montrer que l'endomorphisme $(\operatorname{id}-u)$ est inversible et déterminer son inverse.

THÉORÈME 15 : **Groupe linéaire**
$(\mathrm{GL}(E),\circ)$ est un groupe (non-commutatif) d'élément neutre id_E. On l'appelle : le *Groupe Linéaire.*

Preuve 15 : C'est le groupe unité de l'anneau $(\mathcal{L}(E),\ +,\ \circ)$.

Remarque 15. Contrairement à $(L(E),\ +,\ .)$ $(\mathrm{GL}(E),\ +,\ .)$ n'est pas un espace vectoriel.
On vérifie en effet que $\mathrm{GL}(E)$ n'est ni stable par la lce (prendre $\lambda = 0$), ni par + (prendre $u(x) = x$ et $v(x) = -x$).

Exercice : 10
$(**)$ Soit un $\mathbb{R}$-ev E et un endomorphisme $u \in L(E)$ vérifiant : $u^3 + u^2 + 2\operatorname{id}_E = 0$

1. Montrer que $u \in \mathrm{GL}(E)$ et déterminer son inverse u^{-1}.
2. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que $\lambda^3 + \lambda^2 + 2 \neq 0$ est une CS sur le scalaire λ pour que $(u - \lambda\operatorname{id})$ soit inversible.

3 Projecteurs et Symétries

DÉFINITION 6 : **Projecteur (ou projection) vectoriel**
Soient F et G deux sev de E supplémentaires : $E = F \oplus G$.
$\forall x \in E$, il existe donc une unique décomposition $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$.

On peut alors définir : $\boxed{p : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & x_1 \end{array}}$ appelé le *projecteur sur F parallèlement à G.*
On vérifie facilement que p est un endomorphisme de E.

Dessin

`Exemple 16.` $(*)$ Utilisez les supplémentaires utilisés dans le cours EV1 pour définir des projections.

Au lieu d'utiliser la définition, on pourra déterminer $x' = p(x)$ grace à l'équivalence :

$$x' = p(x) \iff \begin{cases} x' \in F \\ x' - x \in G \end{cases}$$

`Exemple 17.` $(*)$ Soient $F = \{f \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\ \mathbb{R}) \mid f(0) = f'(0) = 0\}$ et $G = \{x \mapsto ax + b \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$.

1. Prouver que F et G sont supplémentaires dans $\mathcal{C}^1(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$.
2. En déduire les expressions de :
   (a) La projection sur F parallèlement à G
   (b) La projection sur G parallèlement à F

`Exemple 18.` Déterminer l'expression analytique de la projection sur Vect $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ parallèlement à Vect $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Théorème 16 : **Caractérisation des sev associés**
Si p est le projecteur vectoriel sur F par rapport à G, alors : $\begin{cases} F = \operatorname{Im} p \\ G = \ker p \end{cases}$

Preuve 16 : Pas de difficulté par double inclusion.

Remarque 16. On a alors :

1. $E = \operatorname{Im} p \oplus \ker p$ (Im p et $\ker p$ sont supplémentaires)
2. $F = \operatorname{Im} p$ est aussi l'ensemble des vecteurs invariants : $F = \ker(\mathrm{id}_E - p)$
3. $\forall x \in E$, x se décompose selon $F + G$ de la façon suivante : $x = \underbrace{p(x)}_{\in \operatorname{Im} p} + \underbrace{[x - p(x)]}_{\in \ker p}$

Théorème Fondamental 17 : **Caractérisation des projecteurs**
Soit $p \in \mathcal{F}(E,\ E)$.

$$p \text{ est un } \textit{projecteur} \text{ de } E \iff \begin{cases} p \in L(E) \\ p \circ p = p \end{cases}$$

Preuve 17 :

$\Rightarrow$ Aucune difficulté !

$\Leftarrow$ Soit $p \in L(E)$ vérifiant $p \circ p = p$. Considérons les sev : $\begin{cases} F = \operatorname{Im} p \\ G = \ker p \end{cases}$ et montrons que :

(a) $F \oplus G = E$. On remarquera que $x = p(x) + (x - p(x))$.
(b) p est le projecteur sur F parallèlement à G. Immédiat !

`Exemple 19.` $(*)$ Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,\ y,\ z) = (3x - 4y - 2z,\ 4x - 7y - 4z,\ -5x + 10y + 6z)$.
Calculer $f \circ f$ et en déduire la nature de f et ses éléments caractéristiques.

Exercice : 11

$(*)$ Soit un projecteur p d'un espace vectoriel E et un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$. On définit l'endomorphisme $u = p + \lambda\,\mathrm{id}_E$.
Exprimer pour $n \in \mathbb{N}$, l'endomorphisme u^n à l'aide de p et de id_E.

Exercice : 12

$(**)$ On considère un projecteur p d'un $\mathbb{R}$-espace vectoriel E et un réel $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$. Soit un vecteur $b \in E$.
Montrer que l'équation vectorielle

$$(E) \quad p(x) - \lambda x = b$$

possède une unique solution $x_0 \in E$.

Proposition 18 : Projecteur associé

Si $p \in \mathcal{L}(E)$ est la projection $\left\{\begin{array}{l} \text{sur } F \\ //^t \text{ à } G \end{array}\right.$ alors $\boxed{q = \mathrm{id}_E - p}$ est la projection $\left\{\begin{array}{l} \text{sur } G \\ //^t \text{ à } F \end{array}\right.$.

Preuve 18 : Immédiat !

Remarque 17. q est appelé le *projecteur associé* à p et on a ainsi : $\left\{\begin{array}{l} \ker(\mathrm{id}_E - p) = \mathrm{Im}\, p \\ \mathrm{Im}(\mathrm{id}_E - p) = \ker p \end{array}\right.$.

`Exemple 20.` $(*)$ Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, on considère les sous-espaces $\left\{\begin{array}{l} E_1 = \mathrm{Vect}(1,\ 1,\ 1) \\ E_2 = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\} \end{array}\right.$.
Déterminer l'expression analytique du projecteur sur E_2 parallèlement à E_1.

Exercice : 13

$(**)$ Soient deux projecteurs p et q d'un espace vectoriel E.

1. Montrer que l'endomorphisme $(p + q)$ est un projecteur de E si et seulement si l'on a $p \circ q = q \circ p = 0$.
2. Si c'est le cas, montrer qu'alors $\left\{\begin{array}{l} \mathrm{Im}(p + q) = \mathrm{Im}\, p \oplus \mathrm{Im}\, q \\ \ker(p + q) = \ker p \cap \ker q \end{array}\right.$.

Définition 7 : Symétrie vectorielle

Soient F et G, deux sev supplémentaires de E.
$\forall x \in E$, il existe donc une unique décomposition $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$.

On peut alors définir : $\boxed{\begin{array}{cccc} s : & E & \longrightarrow & E \\ & x & \longmapsto & x_1 - x_2 \end{array}}$ appelé la *symétrie* $\left\{\begin{array}{l} \textit{par rapport à } F \\ \textit{parallèlement à } G \end{array}\right.$.

Dessin

Remarque 18. Si s est la symétrie $\left\{\begin{array}{l}\text{par rapport à } F\\ \text{parallèlement à } G\end{array}\right.$ alors $s = 2p - id_E$ où p est la projection $\left\{\begin{array}{l}\text{sur } F\\ \text{parallèlement à } G\end{array}\right.$.
p est appelé le *projecteur associé* à s.

Au lieu d'utiliser la définition, on pourra déterminer $x' = s(x)$ grace à l'équivalence :

$$x' = s(x) \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x' + x \in F\\ x' - x \in G\end{array}\right.$$

Exemple 21. $(*)$ Dans l'espace $\mathbb{R}^3$, déterminer l'expression analytique de la symétrie par rapport au sous-espace E_1 parallèlement au sous-espace E_2 où :

$$E_1 = \text{Vect}\big((1,\ 0,\ 0), (1,\ 1,\ 1)\big) \text{ et } E_2 = \text{Vect}(1,\ 2,\ 0)$$

Théorème 19 : **Caractérisation des sev associés**
Soit la symétrie vectorielle s par rapport à F parallèlement à G.
On a alors $\begin{cases} F = \ker(s - \text{id}_E) & \text{(sev des vecteurs invariants)}\\ G = \ker(s + \text{id}_E) & \text{(sev des vecteurs transformés en leur opposé)}\end{cases}$

Preuve 19 : Soit p le projecteur associé à s : $s = 2p - Id_E$. On utilise le fait que $F = \ker(p - \text{id}_E)$ et $G = \ker p$

Remarque 19. Si s est une symétrie vectorielle, on a alors : $\ker(s - \text{id}) \oplus \ker(s + \text{id}_E) = E$

Théorème Fondamental 20 : **Caractérisation des symétries vectorielles**
Soit un endomorphisme $s \in \mathcal{F}(E,\ E)$.

$$s \text{ est une } \textit{symétrie vectorielle} \Longleftrightarrow \left\{\begin{array}{l} s \in L(E)\\ s \circ s = \text{id}_E\end{array}\right.$$

Preuve 20 :

$\Rightarrow$ Evident !

$\Leftarrow$ Soit $s \in L(E)$ tel que $s \circ s = \text{id}_E$. Soit $p = \dfrac{1}{2}(s + \text{id}_E)$.
On montre très facilement que p est un projecteur en prouvant que $p \circ p = p$. CQFD ...

4 Formes linéaires

Définition 8 : **Formes linéaires, dual**
Soit un $\mathbb{K}$-ev E. On appelle *forme linéaire* sur E, une application linéaire $\phi : E \mapsto \mathbb{K}$.
On note $E^\star = L(E,\ \mathbb{K})$ l'ensemble des formes linéaires sur E.

Exemple 22. $(*)$ Montrer que les applications suivantes sont des formes linéaires :

1. $f_1 : \begin{array}{ccc} \mathcal{C}([0;1],\ \mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ f & \mapsto & \int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\end{array}$

2. $f_2 : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}\\ (x,\ y,\ z) & \mapsto & 2x - y + 3z\end{array}$

Remarque 20. $E^\star$ s'appelle l'espace *dual* de l'espace E.

Théorème Fondamental 21 : **Expression analytique d'une forme linéaire**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev muni d'une base $\mathcal{B} = (e_i)_{i\in I}$.
On note $(x_i)_{i\in I}$ les coordonnées d'un vecteur x dans cette base.
Alors,

$$\boxed{\phi \in E^* \quad \Longleftrightarrow \quad \exists (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \text{ telle que } \forall x \in E,\ \phi(x) = \sum_{i\in I} a_i.x_i}$$

Preuve 21 :

- $\Rightarrow$ Si $\phi \in E^*$. Soit x de coordonnées (x_i) dans la base $\mathcal{B}$.
  On a alors $x = \sum_{i\in I} x_i.e_i$ et par conséquent, $\phi(x) = \sum_{i\in I} x_i.\phi(e_i)$. Ceci est bien de la forme attendue !
- $\Leftarrow$ Si ϕ est de la forme $\phi(x) = \sum_{i\in I} a_i.x_i$ alors il est évident que ϕ est une forme linéaire.

Définition 9 : **Hyperplan**
On appelle *hyperplan* de E, le noyau d'une forme linéaire $\boxed{\text{non-nulle}}$: $\boxed{H = \ker\phi}$
On a alors : $x \in H \iff \phi(x) = 0$.

Lorsque E est muni d'une base $(e_i)_{i\in I}$, nous avons alors :

$$x \in H \iff \sum_{i\in I} a_i.x_i = 0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} (a_i)_{i\in I} \in \mathbb{K}^I \\ (x_i)_{i\in I} \text{ les coordonnées de } x \text{ dans } (e_i) \end{cases}$$

L'équation $\sum_{i\in I} a_i.x_i = 0$ est appelée l'*équation cartésienne de H* dans la base (e_i).

Remarque 21. Un hyperplan de E est donc un sev de E.

`Exemple 23.` $(*)$

1. Donner les hyperplans associés aux deux formes linéaires précédentes.
2. Les hyperplans de $\mathbb{R}^2$ sont les droites vectorielles.
3. Les hyperplans de $\mathbb{R}^3$ sont les plans vectoriels.

Théorème 22 : **Caractérisation des hyperplans**
Soit H un sev d'un $\mathbb{K}$-ev E tel que $H \neq E$.

$$H \text{ est un hyperplan} \iff \exists a \in E \text{ non nul tel que } H \oplus \text{Vect}(a) = E$$

IMPORTANT : si H est un hyperplan , alors on a $\forall a \in E \setminus H, \quad E = H \oplus \text{Vect}(a)$

Preuve 22 : Les deux implications se traitent par analyse/synthèse.

- $\Rightarrow$ Analyse : Soit H un hyperplan, ϕ sa forme linéaire associée et $a \in E$ tel que $H \oplus \text{Vect}(a) = E$.
  On montre alors facilement que $\phi(a) \neq 0$.
  Synthèse : Montrons que si a est tel que $\phi(a) \neq 0$, alors $H \oplus \text{Vect}(a) = E$.
  On recommence ici une analyse/synthèse...
- $\Leftarrow$ Soit $a \in E$ non nul tel que $H \oplus \text{Vect}(a) = E$.
  Analyse : Supposons que $H = \ker\phi$ avec $\phi \neq 0$.
  En notant $x = x_H + \lambda_x a$, on montre facilement que $\phi(x) = \lambda_x \phi(a)$.
  Synthèse : Soit $\phi \ : \ x \mapsto \lambda_x$.
  On montre alors facilement que ϕ est une forme linéaire non nulle et que $H = \ker\phi$.

Dessin

Supplémentaire d'un hyperplan

Exercice : 14

$(*)$ Déterminer un supplémentaire dans $\mathbb{R}^4$ de $F = \{(x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4 \mid 3x - 2y + z = t\}$.

Exercice : 15

$(*)$ Soit l'espace vectoriel $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ et l'application $\delta : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f(0) \end{array}$

Vérifier que δ est une forme linéaire sur E et déterminer un supplémentaire de $H = \ker \delta$.

Exercice : 16

$(*)$ Soit $a \in \mathbb{K}$. Prouver que $H = \{(X - a)P \mid P \in \mathbb{K}[X]\}$ est un hyperplan de $\mathbb{K}[X]$.
Déterminez-en un supplémentaire.

THÉORÈME 23 : **Comparaison de deux équations d'un même hyperplan**
Deux équations d'un même hyperplan H sont proportionnelles.

Preuve 23 : Soient $\left\{ \begin{array}{l} \phi(x) = 0 \\ \psi(x) = 0 \end{array} \right.$ deux équations de H où $\phi,\ \psi \in \mathcal{L}(E,\ \mathbb{K})$ $\boxed{\text{non-nulles}}$ telles que $\left\{ \begin{array}{l} H = \ker \phi \\ H = \ker \psi \end{array} \right.$.
Il s'agit de montrer que $\phi = \lambda\psi$. Soit $a \in E$ tel que $\phi(a) \neq 0$ (et donc $\psi(a) \neq 0$).
On a $E = \ker \phi \oplus \text{Vect}(a)$, donc pour tout $x \in E$, il existe $y \in \ker \phi$ et $\lambda \in \mathbb{K}$ tels que : $x = y + \lambda.a$.
On a alors $\left\{ \begin{array}{l} \phi(x) = \lambda.\phi(a) \\ \psi(x) = \lambda\psi(a) \end{array} \right.$. D'où le résultat en divisant...

5 Connaissez-vous votre cours ?

Vous devez impérativement savoir répondre aux différentes questions suivantes :

	Questions	Réponses attendues
17.	Rappeler la définition d'une application linéaire. Pourquoi $\begin{cases} f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R}) \\ (a,\ b) & \mapsto & u \mid u(x) = ax + b\sin x \end{array} \\ \\ g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ x+iy & \mapsto & (y,\ x+y) \end{array} \end{cases}$ sont-elles linéaires ?	cf cours
18.	Quelles sont les applications linéaires de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^2$?	$u \mid u(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} ax+by+cz \\ dx+ey+fz \end{pmatrix}$
19.	Rappelez les définitions du noyau et de l'image d'une application linéaire.	cf cours
20.	Donner l'image et le noyau de : $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{C}\times\mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x+iy, z) & \mapsto & (y,\ x+z) \end{array}$.	$\begin{cases} \ker u = \text{Vect}(-1,\ 1) \\ \text{Im}\, u = \mathbb{R}^2 \end{cases}$
21.	Comment prouve-t-on en général que $u \in \mathcal{L}(E,\ F)$ est injective ?	On mq $\ker u = \{0_E\}$
22.	Savez-vous démontrer que $\ker f \subset \ker f\circ f$ et que $\text{Im}(f\circ f) \subset \text{Im}\, f$?	cf cours
23.	Comment utiliser la notion de noyau pour prouve que $F \subset E$ est un sev de E ?	On mq $F = \ker u \ /\ u \in \mathcal{L}(E,\ G)$
24.	Soit $u \in \mathcal{L}(E,\ F)$. Que dire de $\text{Im}\, u$ lorsque $E = \text{Vect}\{e_1,\ e_2,\ e_3\}$?	$\text{Im}\, u = \text{Vect}\{u(e_1),\ u(e_2),\ u(e_3)\}$
26.	Que signifie les notions d'endomorphisme, d'isomorphisme et d'automorphisme ?	cf cours
27.	Que peut-on dire de la composée de 2 AL et de la réciproque d'une AL bijective ?	ce sont des AL
28.	Donner les structures de $\mathcal{L}(E,\ F)$ et de $\mathcal{L}(E)$.	un $\mathbb{K}$-ev - une $\mathbb{K}$-algèbre
29.	Que représente f^3 lorsque f est un endomorphisme ?	$f^3 = f\circ f\circ f$
30.	Soit $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$. Quand peut-on appliquer les formules donnant $\begin{cases} (u+v)^n \\ u^n - v^n \end{cases}$? R appeler ces deux formules.	si $u\circ v = v\circ u$ cf cours

31.	Qu'appelle-t-on le *Groupe Linéaire de* E ?	$\mathrm{GL}(\mathbb{E})$: cf cours
32.	Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $u^3 - 2u^2 + u - \mathrm{id}_E = 0$. Justifiez que $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$.	$\begin{cases} u \circ (u^2 - 2u + \mathrm{id}_E) = \mathrm{id}_E \\ (u^2 - 2u + \mathrm{id}_E) \circ u = \mathrm{id}_E \end{cases}$
33.	Rappeler les définitions précises d'une projection et d'une symétrie vectorielles.	cf cours
34.	Quels sont les sous-espaces caractéristiques d'une projection p ? D'une symétrie s ?	$\begin{cases} \mathrm{Im}\, p \\ \ker p \end{cases}$ et $\begin{cases} \mathrm{Im}(s - \mathrm{id}_E) \\ \ker(s + \mathrm{id}_E) \end{cases}$
35.	Quelle est la caractérisation des projections vectorielles ? Des symétries vectorielles ?	$\begin{cases} p \in \mathcal{L}(E) \\ p \circ p = p \end{cases}$ et $\begin{cases} s \in \mathcal{L}(E) \\ s \circ s = \mathrm{id}_E \end{cases}$
36.	En pratique, comment déterminer $p(x)$ lorsque p est la projection sur F, $//^t$ G ?	On cherche $x' \in F \mid x' - x \in G$
36.	En pratique, comment déterminer $s(x)$ lorsque s est la symétrie $/F$, $//^t$ G ?	On cherche x' tq $x' + x \in F$ et $x' - x \in G$
37.	Déterminez l'expres° analyt. de p la proj° sur $\mathrm{Vect}\{(1,\ 3)\}$ $//^t$ $\mathrm{Vect}\{(-2,\ 1)\}$. En déduire l'expres° analyt. de s la symétrie vectorielle associée.	$p : \begin{cases} X = 1/7(x + 2y) \\ Y = 3/7(x + 2y) \end{cases}$ $s : \begin{cases} X = 1/7(-5x + 4y) \\ Y = 1/7(6x + 5y) \end{cases}$
37.	Qu'appelle-t-on une forme linéaire sur un $\mathbb{K}$-ev E ?	Une appl° de $\mathcal{L}(E,\ \mathbb{K})$
38.	Quel lien y-a-t-il entre les notions de *forme linéaire* et d'*hyperplan* ?	$\mathcal{H} = \ker u$ avec $u \neq 0$
39.	Quelle est la caractérisation des hyperplans ? Pourquoi $F = \mathrm{Vect}\{x \mapsto 1,\ x \mapsto x\}$ est un hyp. de E l'ens des f° polyn. de deg 2 ?	cf cours Car $E = F \oplus \mathrm{Vect}\{x \mapsto x^2\}$

6 Exercices de TD

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs $\heartsuit$ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs $\heartsuit$ correspond à la difficulté des exercices.

I] Exemples d'applications linéaires

1. On dit qu'une application f est linéaire si :
   (a) elle va d'un $\mathbb{K}$-ev vers un $\mathbb{K}$-ev
   (b) elle vérifie la propriété $f(\lambda x + \mu y) = \lambda f(x) + \mu f(y)$ pour tout ...
2. Bien connaître la forme des applications linéaires de $\mathbb{K}^n$ dans $\mathbb{K}^p$
3. Bien connaître les définitions du noyau et de l'image d'une application linéaire

Exercice de TD : 1

($\heartsuit$) Le strict minimum à savoir faire :

1. Soit f l'application de $\mathbb{R}^3$ définie par $f((x,\ y,\ z)) = (x-y,\ y-z,\ z-x)$.
   Prouvez que f est une application linéaire et déterminer son image et son noyau.

2. Soit g l'application de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^3$ définie par $f((x,\ y)) = (x-y,\ y,\ 2x+y)$.
   Prouvez que f est une application linéaire et déterminer son image et son noyau.

Exercice de TD : 2

($*$) Soit : $\varphi\ :\ \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\ \mathbb{R}) \mapsto \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ définie par $\varphi(f) = f'' - 3f' + 2f$.
Montrer que φ est un endomorphisme et préciser son noyau.

Exercice de TD : 3

($\heartsuit$) Soit a un élément d'un ensemble X non vide et E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel.

1. Montrer que : $\varphi_a\ :\ \mathcal{F}(X,\ E) \mapsto E$ définie par $\varphi_a(f) = f(a)$ est une application linéaire.
2. Déterminer l'image et le noyau de l'application φ_a.

Exercice de TD : 4

($\heartsuit$) Soit $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R})$, et $n \in \mathbb{N}$

On considère la famille de fonctions $\Phi_k\ :\ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & f^{(k)}(0) \end{array}$ pour $k \in [\![0, n]\!]$.
Montrer que les fonctions Φ_k sont linéaires et que $(\Phi_0, \ldots,\ \Phi_n)$ forme une famille libre de $L(E, \mathbb{R})$.

Exercice de TD : 5

($*$) Soit E le $\mathbb{R}$-espace vectoriel des applications indéfiniment dérivables sur $\mathbb{R}$.

Soient : $\begin{cases} \varphi\ :\ E \mapsto E & \text{définie par : } \varphi(f) = f' \\ \psi\ :\ E \mapsto E & \text{où } \psi(f) \text{ est donnée par } \forall x \in \mathbb{R},\ \psi(f)(x) = \displaystyle\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t \end{cases}$.

1. Montrer que φ et ψ sont des endomorphismes de E.
2. Exprimer $\varphi o \psi$ et $\psi o \varphi$.
3. Déterminer images et noyaux de φ et ψ.

II] Propriétés des images et noyaux

Le noyau et l'image d'une application linéaire sont des sev respectivement de l'ev de départ et de l'ev d'arrivée.

Exercice de TD : 6

($\heartsuit\heartsuit$) Soit E un $\mathbb{C}$-ev et $f \in \mathcal{L}(E)$ vérifiant $f^3 = \mathrm{id}_E$.
Montrer que $E = E_1 \oplus E_j \oplus E_{j^2}$ où $E_\lambda = \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_E)$.

Exercice de TD : 7

($**$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 - 3f + 2\,\mathrm{id}_E = 0$.

1. Montrer que f est inversible et exprimer son inverse en fonction de f.
2. Etablir que $\ker(f - \mathrm{id}_E)$ et $\ker(f - 2\,\mathrm{id}_E)$ sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de E.

Exercice de TD : 8

($\heartsuit\heartsuit$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, deux scalaires distincts $\alpha,\ \beta \in \mathbb{K}$ et $f \in \mathcal{L}(E)$.
Montrer que : $\ker(f^2 - (\alpha+\beta)f + \alpha\beta\,\mathrm{id}_E) = \ker(f - \alpha\,\mathrm{id}_E) \oplus \ker(f - \beta\,\mathrm{id}_E)$.

Exercice de TD : 9

($\heartsuit\heartsuit$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f,\ g \in \mathcal{L}(E)$ telles que $\begin{cases} f\circ g\circ f = f \\ g\circ f\circ g = g \end{cases}$.

1. Montrer que $\operatorname{Im} g$ et $\ker f$ sont supplémentaires dans E.
2. En déduire que $f(\operatorname{Im} g) = \operatorname{Im} f$

Exercice de TD : 10

($**$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel, et $f,\ g,\ h \in \mathcal{L}(E)$ telles que $\begin{cases} f\circ g = h \\ g\circ h = f \\ h\circ f = g \end{cases}$.

1. Montrer que f, g et h on même noyau et même image.
2. Montrer que $f^2 = g^2$, que $f^2 = h^2$ et en déduire que $f^5 = f$.
3. En déduire que l'image et le noyau de f sont supplémentaires dans E

III] Divers

Pas de connaissance spécifique à avoir, mais il faut bien connaître son cours et les méthodes usuelles de raisonnement.

Exercice de TD : 11

($\heartsuit\heartsuit$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x \in E$, les vecteurs x et $f(x)$ sont colinéaires.

1. Justifier que $\forall x \in E,\ \exists \lambda_x \in \mathbb{K}$ tel que $f(x) = \lambda_x.x$
2. Montrer que pour tout couple de vecteurs non nuls x et y, on a $\lambda_x = \lambda_y$.
   indice : on pourra distinguer les cas : $(x,\ y)$ liée et $(x,\ y)$ libre.
3. Conclure que f est une homothétie vectorielle.

Exercice de TD : 12

($***$) Soit E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev, $f \in \mathcal{L}(E,\ G)$ et $g \in \mathcal{L}(E,\ F)$.
Montrer que : $\ker g \subset \ker f \iff \exists h \in \mathcal{L}(F,\ G)$ telle que $f = h\circ g$.

Aide : pour $\Rightarrow$, on pourra rechercher h en le définissant sur $\operatorname{Im} g$ et sur un supplémentaire de $\operatorname{Im} g$.

Exercice de TD : 13

($*$) Soit $f \in \mathcal{L}(E,\ F)$ injective.
Montrer que si $E_1 + E_2 = E_1 \oplus E_2$ alors $f(E_1) + f(E_2) = f(E_1) \oplus f(E_2)$.

IV] Projecteurs et symétries

1. Il faut connaître les expressions des directions et des supports sous la forme d'image et/ou de noyau (un dessin suffit en général à les retrouver).
2. Pour montrer que p est une projection, on montre que p est un endomorphisme qui vérifie $p\circ p = p$
3. Déterminer la projection p sur F parallélement à G consiste à déterminer $p(x)$ pour tout $x \in E$.
   Pour cela, on dispose de deux méthodes :
   (a) Soit on prouve par analyse/synthèse que $F \oplus G = E$.
   Cette méthode donne la décomposition $x = x_F + x_G$ et on a alors $p(x) = x_F$
   (b) Soit on cherche directement $p(x)$ en disant que $p(x) \in F$ et $x - p(x) \in G$.

Exercice de TD : 14

($\heartsuit$) Utiliser les décompositions en supplémentaires obtenues dans le premier chapitre sur les EV pour construire des projections et des symétries vectorielles.

Exercice de TD : 15

($* * - * * *$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et p un projecteur de E.

On pose $q = \mathrm{id}_E - p$ et on considère $\begin{cases} L = \{f \in \mathcal{L}(E) \mid \exists u \in \mathcal{L}(E),\ f = uop\} \\ M = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid \exists v \in \mathcal{L}(E),\ g = voq\} \end{cases}$.

Montrer que L et M sont des sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathcal{L}(E)$.

Exercice de TD : 16

($\heartsuit\heartsuit$) Soit E un $\mathbb{K}$-ev et p et q deux projecteurs de E qui commutent.

Montrer que poq est un projecteur de E et déterminer son noyau et son image.

Exercice de TD : 17

($\heartsuit\heartsuit$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$ tel que $fog = gof$. Montrer que $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont stables par g.
2. En déduire que, si p est un projecteur de E, on a :
   "p et f commutent si et seulement si $\operatorname{Im} p$ et $\ker p$ stables par f".

Exercice de TD : 18

($**$) Soit E un $\mathbb{K}$-ev et $(a, b) \in \mathbb{K}^2$ tel que $a \neq b$. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ telle que $(f - a\,\mathrm{id}_E)o(f - b\,\mathrm{id}_E) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $(\lambda,\ \mu) \in \mathbb{K}^2$ et des projecteurs p et q tels que : $\begin{cases} p = \lambda(f - a\,\mathrm{id}_E) \\ q = \mu(f - b\,\mathrm{id}_E) \\ f = bp + aq \end{cases}$
2. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, calculer f^k en fonction de p, q, a et b.

Exercice de TD : 19

($\heartsuit\heartsuit$) Soient p et q deux projecteurs de E vérifiant $p \circ q = 0$.

1. Montrer que $r = p + q - q \circ p$ est un projecteur de E.
2. Prouver que $\operatorname{Im} r = \operatorname{Im} p + \operatorname{Im} q$ et que $\ker r = \ker p \cap \ker q$.

V] Formes linéaires

1. Une forme linéaire est une application linéaire à valeurs dans le corps $\mathbb{K}$
2. Le noyau d'une forme linéaire non nulle est appelé un hyperplan
3. Dans une base de E, les hyperplans de E sont les ensembles dont une équation cartésienne est de la forme : $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$.
4. $\mathrm{Vect}(a)$ est un supplémentaire d'un hyperplan $\ker\varphi$ dès lors que $\varphi(a) \neq 0$

Exercice de TD : 20

($\heartsuit$) Dans $E = \mathbb{R}^n$, on considère $H = \{(x_1, \ldots,\ x_n) \in E,\ x_1 + \cdots + x_n = 0\}$.

Montrer que H est un sous-espace vectoriel de E, et trouver un supplémentaire de H dans E.

Le supplémentaire trouvé est-il unique ?

Exercice de TD : 21

($\heartsuit$) Soient $P = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ et D le sev de $\mathbb{R}^3$: $D = \mathrm{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix})$.

1. Prouver que $P \oplus D = \mathbb{R}^3$.
2. Déterminer les expressions des projections et symétries de sous-espaces vectoriels caractéristiques P et D.