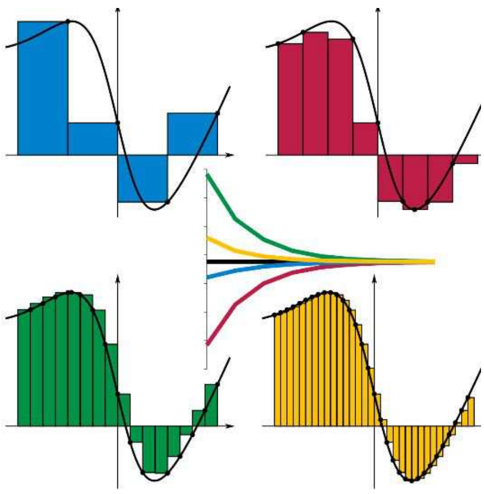
Intégration

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

10 mai 2017



Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ représente le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

1 Notion de Continuité uniforme

DÉFINITION 1 : **Fonction uniformément continue**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{K}$ définie sur un intervalle I.
On dit qu'elle est *uniformément continue* sur I lorsque :

$$\forall \varepsilon > 0,\ \exists \eta > 0, \quad \text{tel que} \quad \forall (x,\ y) \in I^2, \quad |x - y| \leq \eta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$$

Le nombre η est indépendant des réels $(x,\ y)$ et s'appelle un *module d'uniforme continuité*.

Fonction uniformément continue :

`Exemple 1.`

1. Les fonctions $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos x \end{array}$ et $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^+ & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{x} \end{array}$ sont uniformément continues

2. Les fonctions $f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^{+*} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \ln x \end{array}$ et $g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \cos x^2 \end{array}$ ne sont pas uniformément continues.

Exemples

THÉORÈME 1 : **Théorème de Heine**
Une fonction continue sur un segment (à valeur dans $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) est uniformément continue sur ce segment.

Preuve 1 : La démonstration de ce théorème n'est pas exigible.
On procède par l'absurde.
Supposons qu'il existe un $\varepsilon > 0$ tel que $\forall \eta > 0$, il existe $(x,\ y) \in [a,\ b]^2$ tel que $|x-y| \leq \eta$ et $|f(x)-f(y)| > \varepsilon$.
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, prenons $\eta = \frac{1}{n}$.
On construit alors deux suites (x_n) et (y_n) de $[a,\ b]$ telles que $|x_n - y_n| \leq \frac{1}{n}$ et $|f(x_n)-f(y_n)| > \varepsilon$.
La suite (x_n) est bornée ...
On peut donc en extraire une suite convergente (théorème de Bolzano-Weirstrass) $(x_{\varphi(n)}) \mapsto c \in [a,\ b]$.
On montre alors facilement que $(y_{\varphi(n)}) \mapsto c \in [a,\ b]$.
La continuité de f en c permet alors de mettre en évidence une contradiction !

2 Construction de la notion d'intégrale

Cette partie a pour objectif de définir correctement la notion d'*intégrale de Riemann* d'une fonction **continue par morceaux** sur un segment. Les théorèmes énoncés ici servent à cette construction et auront peu d'utilisation pratique.

2.1 Intégrale d'une fonction en escalier

DÉFINITION 2 : **Subdivision**
On appelle subdivision σ du segment $[a,b]$ tout sous-ensemble fini de $[a,b]$ contenant les éléments a et b.
On ordonnera ces éléments et l'on écrira $x_0 = a < x_1 < \ldots < x_n = b$ les éléments de cette subdivision.

Remarque 1. Si σ_1 et σ_2 sont deux subdivisions du segment $[a,b]$, on peut introduire la subdivision $\sigma = \sigma_1 \cup \sigma_2$ qui est *plus fine* que σ_1 et que σ_2 (c'est à dire telle que $\sigma_1 \subset \sigma$ et $\sigma_2 \subset \sigma$).

Subdivision d'un segment

Remarque 2. Lorsque pour tout $i \in [\![0, n-1]\!]$ on a $x_{i+1} - x_i = \frac{b-a}{n}$, on dit que la subdivision est régulière et $p = \frac{b-a}{2}$ est appelé le *pas* de la subdivision.

Subdivision régulière d'un segment

Définition 3 : Fonction en escalier
Soit I un intervalle de bornes a et b.

Une fonction $\varphi \in \mathcal{F}(I,\ \mathbb{K})$ est *en escalier* s'il existe une subdivision σ de $[a,\ b]$: $a < x_1 \ldots < x_n = b$ telle que φ soit constante (égal à λ_i) sur chaque intervalle $]x_i,\ x_{i+1}[$ pour $0 \leq i \leq n-1$.

La subdivision σ est dite *subordonnée* à la fonction φ.
On notera $\mathcal{E}(I,\ \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions en escalier sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.

Fonction en escalier

Remarque 3.

1. Si σ est une subdivision associée à la fonction en escalier φ, alors toute subdivision plus fine que σ (c'est à dire, qui inclus σ) est également subordonnée à φ.
2. L'ensemble des subdivisions subordonnées à φ admet un plus petit élément (au sens de l'inclusion : $\sigma_a \subset \sigma_b$) que l'on appellera la *subdivision minimale*. Vous vérifierez que cet ensemble n'est pas totalement ordonné!!

Remarque 4. Une fonction constante est une fonction en escalier.

Définition 4 : Intégrale de Riemann d'une fonction en escalier

Soit σ une subdivision subordonnée à la fonction φ sur laquelle : $\forall x \in]x_i,\ x_{i+1}[,\ \varphi(x) = \lambda_i$

On appelle intégrale de Riemann de la fonction en escalier $\varphi \in \mathcal{E}([a,\ b],\ \mathbb{K})$, le réel :

$$\boxed{\int_{[a,\ b]} \varphi = \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x_{i+1} - x_i)}$$

IMPORTANT : Cette quantité est indépendante de la subdivision σ subordonnée à φ.

Intégrale d'une fonction en escalier

Remarque 5.

1. $\int_{[a,\ b]} \varphi$ est indépendante des valeurs $\varphi(x_i)$ où $i \in [\![0, n]\!]$.
2. Si φ est constante et égale à M, alors $\int_{[a,b]} \varphi = M.(b-a)$.
3. Si $\varphi \geq 0$ sur $[a,\ b]$ alors $\int_{[a,b]} \varphi$ représente l'aire (en unité^2) de la portion du plan comprise entre $\left\{ \begin{array}{l} \text{la courbe} \\ \text{l'axe } O_x \end{array} \right.$.

2.2 Intégrale d'une fonction continue par morceaux

DÉFINITION 5 : **Fonction continue par morceaux sur un segment**
Soit une fonction $f : [a,\ b] \mapsto \mathbb{K}$.
On dit que f est continue par morceaux s'il existe une subdivision $\sigma : a = x_0 < x_1 \cdots < x_n = b$ du segment $[a,\ b]$ telle que :

1. La restriction f_i de la fonction f à chaque intervalle $]x_i,\ x_{i+1}[$ $(0 \leq i \leq n-1)$ est continue
2. La restriction f_i de la fonction f à chaque intervalle $]x_i,\ x_{i+1}[$ possède une limite $\begin{cases} \text{à droite en } x_i \\ \text{à gauche en } x_{i+1} \end{cases}$.

Fonction continue par morceaux sur un segment

DÉFINITION 6 : **Fonction continue par morceaux sur un intervalle**
Soit une fonction $f : I \mapsto \mathbb{K}$.
On dit qu'elle est continue par morceaux si sa restriction à tout segment inclus dans I est elle-même continue par morceaux.

Fonction continue par morceaux sur un intervalle

Remarque 6.

1. On notera $\mathcal{C}_m(I,\ \mathbb{K})$ l'ensemble des fonctions continues par morceaux sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$.
2. Les fonctions continues sur un intervalle I sont aussi continues par morceaux sur I.

THÉORÈME FONDAMENTAL 2 :
Encadrement d'une fonction continue par morceaux par deux fonctions en escalier
Soit une fonction f continue par morceaux sur $[a,\ b]$.
Alors, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe deux fonctions en escalier φ et ψ sur $[a,\ b]$ telles que :

$$\forall x \in [a,\ b] \quad \begin{cases} \varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x) \\ 0 \leq \psi(x) - \varphi(x) \leq \varepsilon \end{cases}$$

Encadrement d'une fonction continue par deux fonctions en escalier

Preuve 2 :

1. Sur chacun des intervalles de la subdivision associée à f, on prolonge f en $\tilde{f}$.
2. $\tilde{f}$ étant continue sur chacun des segments de la subdivision, on peut appliquer le théorème de Heine.
3. Cela nous permet de définir pour tout $\varepsilon > 0$ les fonctions φ et ψ recherchées.

Remarque 7. On peut trouver les fonctions en escalier φ et ψ pour un ε aussi petit que l'on veut en choisissant une subdivision de $[a,\ b]$ suffisamment fine.

Théorème Fondamental 3 : **Intégrale de Riemann d'une fonction continue par morceaux**
Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,\ b],\ \mathbb{K})$.
On note : $$I(f) = \sup_{\substack{\varphi \in \mathcal{E}([a,b]) \\ \varphi \leq f}} \int_{[a,b]} \varphi \quad \text{et} \quad S(f) = \inf_{\substack{\psi \in \mathcal{E}([a,b]) \\ \psi \geq f}} \int_{[a,b]} \psi$$
On a alors $I(f) = S(f)$ et cette valeur commune I est appelée :

intégrale de f sur le segment $[a, b]$: $$\boxed{\int_{[a,b]} f = I(f) = S(f)}$$

Preuve 3 :

1. On démontre facilement l'existence de $I(f)$ et $S(f)$ par le théorème de la borne sup et inf.
2. Grâce au théorème précédent, on démontre que pour tout $\varepsilon > 0$, on a $|I(f) - S(f)| \leq \varepsilon$.

Remarque 8.

1. L'intégrale ainsi définie est appelée *intégrale de Riemann* d'une fonction f continue par morceaux.
2. Il existe d'autres types d'intégrales qui ne sont pas au programme (intégrale de Lebesgue - 1902).
3. Toutes les fonctions continues par morceaux sur un segment $[a,\ b]$ (et donc à fortiori les fonctions continues) sont intégrables au sens de Riemann sur le segment $[a,\ b]$.
4. $\int_{[a,\ b]} f$ est indépendante des valeurs $f(x_i)$ où $\{x_i\}_{i \in [\![0,n]\!]}$ est une subdivision subordonnée à f.
5. Deux fonctions continues par morceaux sur $[a,\ b]$ qui ne diffèrent qu'en un nombre fini de points ont même intégrale de Riemann.
6. Si $f \geq 0$ sur $[a,\ b]$, alors $\int_{[a,b]} f$ représente l'aire de la portion du plan comprise entre $\left\{ \begin{array}{l} \text{la courbe} \\ \text{l'axe } O_x \end{array} \right.$.

Remarque 9. **Contre-exemple**
Il existe des fonctions bornées non-intégrables au sens de Riemann.
Considérons par exemple la fonction caractéristique des rationnels sur $[0,\ 1]$ définie par :

$$\chi : \begin{array}{ccc} [0,\ 1] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 0 & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases} \end{array}$$

On montre en effet facilement que $I(\chi) \leq 0$ et $S(\chi) \geq 1$.
Pourtant, cette fonction est intégrable au sens de Lebesgue et son intégrale sur $[0,\ 1]$ est égale à 1.

Théorème 4 : **Propriétés fondamentales de l'intégrale**
Soient f et g deux fonctions continues par morceaux sur le segment $[a,\ b]$ (avec $a < b$) à valeurs dans $\mathbb{K}$.

1. **Linéarité :** $I\ :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{C}_m([a,\ b]) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ f & \mapsto & \int_{[a,\ b]} f \end{array}$ est une forme linéaire sur $\mathcal{C}_m([a,b])$
2. **Positivité :** si $\forall x \in [a,\ b],\ f(x) \geq 0\ (*)$, alors : $\displaystyle\int_{[a,\ b]} f \geq 0$
3. **Chasles :** si $a < c < b$, alors : $\displaystyle\int_{[a,\ c]} f + \int_{[c,\ b]} f = \int_{[a,b]} f$
4. **Majoration** : on a la majoration suivante : $\displaystyle\left|\int_{[a,\ b]} f\right| \leq \int_{[a,\ b]} |f|$
5. **Croissance** : si $f \leq g\ (*)$, alors : $\displaystyle\int_{[a,\ b]} f \leq \int_{[a,\ b]} g$

$(*)$ *sauf éventuellement en un nombre fini de points*

Preuve 4 : Il s'agit d'étendre par passage à la limite les propriétés connues pour les fonctions en escalier. Compte-tenu de la lourdeur de ces démonstrations, nous admettrons les résultats précédents.

3 Notation définitive et majorations fondamentales d'intégrales.

Tous les théorèmes importants de ce chapitre sont dans les parties suivantes ! Les démonstrations des propriétés de base ont été vu dans la partie consacrée à la construction de l'intégrale de Riemann.

3.1 Notation définitive

Définition 7 : **N**otations
Soit une fonction f continue par morceaux sur $[a,\ b]$ avec $a < b$ à valeurs dans $\mathbb{K}$.
On note alors :

1. $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_{[a,b]} f$ 2. $\displaystyle\int_b^a f(t)\ \mathrm{d}t = -\int_{[a,b]} f$ 3. $\displaystyle\int_a^a f(t)\ \mathrm{d}t = 0$

Remarque 10.

1. l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ pourra aussi se noter $\displaystyle\int_a^b f$ s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la variable d'intégration.
2. On remarque qu'avec la notation précédente on a : $\displaystyle\int_b^a f = -\int_a^b f$
3. $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est un scalaire (de $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$) indépendant de la variable d'intégration t.

3.2 Définition d'une intégrale

Pour montrer que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$ est définie :

1. Il suffit de montrer que f est continue par morceaux sur $[a,\ b]$.
2. En général, on prouvera plutôt la continuité de f sur $[a,\ b]$.

`Exemple 2.` $(*)$ Montrer que les intégrales suivantes existent :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1 - k\sin x}}$ avec $0 < k < 1$. 2. $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t$

`Exemple 3.` $(*)$ Déterminer l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

1. F définie par : $F(x) = \displaystyle\int_{\sqrt{x}}^{x+1} \cos(t)\ \mathrm{d}t$.
2. G définie par : $G(x) = \displaystyle\int_{x}^{x^2} \ln(t)\ \mathrm{d}t$.

3.3 Quelques propriétés de base

PROPOSITION 5 : **Linéarité de l'intégrale de Riemann**
Soit f et g deux fonctions continues par morceaux sur $[a,\ b]$ à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $\lambda,\ \mu \in \mathbb{R}$, alors :

$$\int_a^b \lambda f + \mu g = \lambda \int_a^b f + \mu \int_a^b g$$

PROPOSITION 6 : **Chasles**
Soit f continue par morceaux sur l'intervalle I à valeurs dans $\mathbb{K}$ et $(a,\ b,\ c) \in I^3$, alors

$$\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\ \mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\ \mathrm{d}t$$

PROPOSITION 7 : **Positivité**
Soit $f \in \mathcal{C}_m([a,\ b],\ \mathbb{R})$.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} f(t) \geq 0,\ \forall t \in [a,\ b] \\ a \leq b \end{cases}, \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \geq 0$$

⚠ Si $a \geq b$, on a $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leq 0$.

3.4 Fonction continue dont l'intégrale est nulle

COROLLAIRE 8 : **Fonction continue à signe constant dont l'intégrale est nulle**
Soit f une fonction $\boxed{\text{continue}}$ sur $[a,\ b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ (avec $a \neq b$).

$$\text{Si} \quad f \text{ est de signe constant sur } [a,\ b] \quad \text{alors} \quad \int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0 \Rightarrow f = 0$$

Preuve 8 : Supposons $f \geq 0$.
On considère F telle que $F(x) = \int_a^x f(t)\ \mathrm{d}t$.
F est alors la primitive de f qui s'annule en a (admis pour l'instant).
La fonction F est croissante et $F(a) = F(b) = 0$.
Par conséquent : F est la fonction nulle sur $[a,\ b]$ et en dérivant, on en déduit que f est aussi nulle sur $[a,\ b]$.

`Exemple 4.` Montrer que les termes généraux de la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n x\ \mathrm{d}x$ sont strictement positifs.

Exercice : 1

$(*)$ Que dire de la fonction $f \in \mathcal{C}([0,\ 1],\ [0,\ 1])$ vérifiant $\displaystyle\int_0^1 f = \int_0^1 f^2$?

Remarque 11.
⚠ Dans le théorème précédent, la fonction f doit être impérativement continue et de signe constant sur $[a,\ b]$.

COROLLAIRE 9 : Une fonction réelle continue sur $[a,\ b]$ telle que $\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t = 0$, s'annule sur $]a,\ b[$.

Preuve 9 : Par l'absurde :
Supposons que la fonction ne s'annule pas sur $]a,\ b[$. Alors elle est positive ou négative.
D'après le théorème précédent, cette fonction devrait donc être nulle... ce qui est faux !

Remarque 12. Comme le TVI, ce résultat peut être utilisé pour prouver qu'une application continue s'annule sur $]a,\ b[$.

DÉFINITION 8 :
Pour toute fonction continue par morceaux sur un segment $[a;b]$,

la valeur $\boxed{\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f}$ est appelée *la valeur moyenne* de f sur $[a;b]$.

$\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f$ est la constante α telle que $\displaystyle\int_a^b \alpha = \int_a^b f$

Exercice : 2

$(*)$ Soit f une fonction continue sur une segment $[a,\ b]$. Montrer que $\exists c \in [a,\ b] \mid f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice : 3

$(*)$ Soit $f \in \mathcal{C}([0,1],\ \mathbb{R})$ telle que $\displaystyle\int_0^1 f(t)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$. Montrer que f admet un point fixe sur $]0,\ 1[$.

3.5 Majorations

THÉORÈME 10 : **Majoration usuelle 1 (croissance de l'intégrale)**
Soit f et g deux fonctions continues par morceaux à valeurs dans $\mathbb{R}$ sur le segment $[a,\ b]$.
Alors :

$$\text{SI} \quad \boxed{\begin{cases} f(t) \leq g(t) & \forall t \in [a,\ b] \\ a \leq b \end{cases}} \quad \text{alors} \quad \boxed{\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t \leq \int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t} \quad (1)$$

⚠ L'inégalité (1) est inversée si $a \geq b$.

Preuve 10 : Conséquence quasi-immédiate de la proposition précédente.

Remarque 13. En particulier, dans le cas où $a \leq b$, on a :

$$\text{Si} \quad \forall x \in [a,\ b], \quad m \leq f(x) \leq M \quad \text{alors} \quad m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x \leq M(b-a)$$

Exercice : 4

$(**)$ Soit une fonction $f : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ continue. Etudier la limite de la suite de terme général : $I_n = \displaystyle\int_0^1 f\left(\frac{x}{n}\right)\ \mathrm{d}x$.
Vous penserez à appliquer le théorème de Weierstrass

⚠ Ne JAMAIS effectuer un passage à la limite à l'intérieur d'une intégrale ⚠

Exercice : 5

$(**)$ Soit f une fonction continue sur une segment $[a,\ b]$. Montrer que $\exists c \in [a,\ b] \mid f(c) = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$.
On pourra commencer par appliquer le TVI et le théorème de Weierstrass

Encadrement de $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x$:

Pour obtenir un encadrement précis de $\displaystyle\int_a^b f(x)g(x)\ \mathrm{d}x$, on pourra choisir de garder l'une des deux fonctions et encadrer grossièrement la deuxième sur $[a,\ b]$.

Le choix de la partie à encadrer est dicté par :

1. *la volonter de conserver la fonction qui a le plus d'incidence sur le comportement de l'intégrale*
2. *la possibilité de calculer ou non les intégrales obtenues de part et d'autre de l'encadrement*

Exercice : 6

(∗) Etudier les limites des suites définies par les intégrales suivantes :

1. $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $J_n = \displaystyle\int_0^1 x^n \arctan(1-nx)\,\mathrm{d}x$

Exercice : 7

(∗) Déterminer les limites des intégrales suivantes :

1. $\displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\ln t}{1+t^4}\,\mathrm{d}t$ lorsque $x \to +\infty$.
2. $\displaystyle\int_0^1 x^2\sqrt{1+a^2x^2}\,\mathrm{d}x$ lorsque $a \to 0$.

Exercice : 8

(∗) Déterminer un équivalent lorsque $x \to 0$ de la fonction définie par : $F(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{e^t}{t}\,\mathrm{d}t$

Théorème 11 : **Majoration usuelle 2**

Soient f une fonction continue par morceaux à valeurs dans $\mathbb{K}$ sur le segment $[a,\ b]$.

SI $\boxed{a \leq b}$ alors $\boxed{\left|\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right| \leq \int_a^b |f(x)|\,\mathrm{d}x}$

`Exemple 5.` (∗) Soit une fonction $f \in \mathcal{C}([a,\ b],\ \mathbb{K})$.

Montrer que la fonction définie par $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est lipschitzienne sur le segment $[a,\ b]$.

Théorème Fondamental 12 : **Inégalité de Cauchy-Schwarz**

Soient deux fonctions f et g continues par morceaux sur le segment $[a,\ b]$. Alors

$$\boxed{\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}$$

Lorsque f et g sont continues sur $[a,\ b]$, on a l'égalité ssi les fonctions sont proportionnelles.

Preuve 12 : On considère l'expression $P(t) = \displaystyle\int_a^b (f(x)+tg(x))^2\,\mathrm{d}x$.

1. Après développement, on constate qu'il s'agit d'une fonction polynômiale en t de degré deux et toujours positive. Son discriminant doit donc être négatif !
2. Pour l'égalité :
   $\Rightarrow$ Si on a l'égalité, alors il existe une valeur t_0 qui annule $P(t)$. La suite est immédiate !
   $\Leftarrow$ Si $g = \lambda f$ alors l'égalité est évidente.

`Exemple 6.` (∗) Soit une suite de fonctions (f_n) toutes continues sur le segment $[a, b]$.

En supposant que $\displaystyle\int_a^b f_n^4(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$, montrer que : $\displaystyle\int_a^b f_n(x)\,\mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Théorème 13 : **Inégalité "triangulaire" de Minkowski**

Soient deux fonctions continues par morceaux f et g sur le segment $[a,\ b]$.

On a alors l'inégalité de Minkowski :

$$\boxed{\sqrt{\int_a^b \big(f(x)+g(x)\big)^2\,\mathrm{d}x} \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x} + \sqrt{\int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x}}$$

Preuve 13 : On transforme l'inégalité de Minkowski par équivalences en l'élevant au carré.
On obtient alors l'inégalité de Cauchy-Schwartz.

Remarque 14. En notant $\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\, \mathrm{d}x}$, l'inégalité devient une inégalité triangulaire : $\boxed{\|f+g\|_2 \leq \|f\|_2 + \|g\|_2}$.

4 Le théorème fondamental du calcul

La partie précédente nous permet d'obtenir facilement des encadrements d'intégrales, mais nous ne savons toujours pas comment procéder pour effectuer le calcul d'une intégrale.

Théorème Fondamental 14 : **Existence de primitives d'une fonction continue**
Toute fonction $f : I \mapsto \mathbb{R}$ $\boxed{\textit{continue} \text{ sur un } \textit{intervalle } I}$ admet des primitives sur l'intervalle I.
En particulier, si $a \in I$, la fonction

$$F : \begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t \end{array}$$

est de classe $\mathcal{C}^1$ et est l'unique primitive de la fonction f qui s'annule en a.
On a donc :

$$\forall x \in I,\ F'(x) = f(x)$$

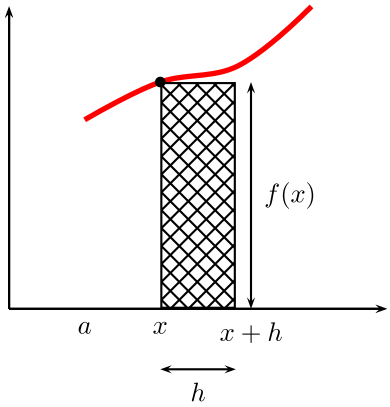


Figure 1 – Théorème fondamental : $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \sim f(x)$

Preuve 14 : Soit la fonction $F\ : x \mapsto \int_a^x f(t)\, \mathrm{d}t$ pour tout $x \in I$.
On démontre facilement que $\frac{F(x+h)-F(x)}{h} \xrightarrow[h\to 0]{} f(x)$. F est donc bien une primitive de f.

Remarque 15. ⚠ Même si une fonction n'est pas continue, elle peut parfois admettre des primitives.
Prenons en effet la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$ pour $x \neq 0$ et $f(0) = 0$.
f n'est clairement par continue en 0 et pourtant, la fonction $\left\{\begin{array}{l} F(x) = x^2\sin(\frac{1}{x}) \\ F(0) = 0 \end{array}\right.$ est une primitive de f sur $\mathbb{R}$.

`Exemple 7.` $(*)$ Etudier la régularité de la fonction $x \mapsto \int_1^x t^2.f(t)\, \mathrm{d}t$ où f est une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.

Exercice : 9

$(*)$ Soit f continue et non nulle sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $a,\ b \in I$ tels que $\int_a^b f(t)\, \mathrm{d}t \neq 0$.

Théorème Fondamental 15 :
Soit $f : I \mapsto \mathbb{R}$ une fonction continue sur le segment $[a, b]$, et $F : [a,\ b] \mapsto \mathbb{R}$ une primitive de f sur le segment $[a,\ b]$. Alors, on sait calculer l'intégrale de f en appliquant la formule :

$$\boxed{\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = F(b) - F(a)} \quad = [F(x)]_a^b$$

Preuve 15 : C'est une conséquence presqu'immédiate du théorème précédent.

`Exemple 8.` (∗) Calculer les intégrales suivantes après avoir justifié leur existence :

1. $I_1 = \displaystyle\int_2^3 \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$
2. $I_2 = \displaystyle\int_e^3 \frac{\mathrm{d}t}{t\ln t}$
3. $I_3 = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^2 x \,\mathrm{d}x$
4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$

COROLLAIRE 16 : **Autre forme du Théorème Fondamental**
Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a, b]$.
Alors la formule suivante relie f à l'intégrale de sa dérivée. Pour tout $x \in [a, b]$:

$$\boxed{f(x) = f(a) + \int_a^x f'(t)\,\mathrm{d}t}$$

Preuve 16 : Conséquence immédiate du théorème fondamental.

Remarque 16. On peut se servir de la formule précédente pour montrer des relations entre une fonction et sa dérivée. On peut, par exemple, grâce à cette formule, retrouver l'inégalité des accroissements finis (avec cependant une condition plus restrictive sur f puisque le théorème impose $f \in \mathcal{C}^1(I)$).

Exercice : 10

(∗∗∗) Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ ne dépendant que des bornes a et b telle que

$$\forall f \in \mathcal{C}^1([a,\ b]) \text{ telle que } f(a) = 0, \quad \int_a^b f^2(t)\,\mathrm{d}t \leq C \int_a^b {f'}^2(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{(Inégalité de Poincaré)}$$

On pensera à utiliser l'inégalités de Cauchy-Schwarz.

Etude de g définie par $g(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\,\mathrm{d}t$, où f est continue sur I.

1. Pour l'ensemble de définition, on recherche les valeurs de x telles que $[u(x),\ v(x)] \subset I$.
2. Pour la dérivabilité, on introduit F une primitive de f et on exprime g sous la forme :

$$g(x) = Fov(x) - Fou(x)$$

   On applique alors le théorème de dérivabilité des fonctions composées.
   Lorsque g est dérivable, on obtient alors : $g' = fov.v' - fou.u'$.
3. Pour le calcul des limites, on utilise les méthodes d'encadrement / majoration vue dans la partie précédente.

Exercice : 11

(∗) Soit la fonction g définie sur $]1, +\infty[$ par $g(x) = \displaystyle\int_x^{x^2} \frac{\mathrm{d}t}{t^2-1}$

1. Montrer que g est définie, dérivable sur $]1, +\infty[$ et calculer la fonction dérivée g'.
2. Dresser le tableau de variations de g.
3. Vous pouvez vérifier les résultats obtenus ci-dessus en calculant directement la fonction g.

5 Changement de variables, intégration par parties.

THÉORÈME 17 : **Changement de variables**
Soit une fonction $f : [a,\ b] \mapsto \mathbb{R}$ continue sur l'intervalle $[a; b]$.
Soit $\varphi : [\alpha,\ \beta] \mapsto [a,\ b]$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[\alpha,\ \beta]$. Alors

$$\boxed{\int_\alpha^\beta f[\varphi(t)]\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = \varphi(\alpha) \\ b = \varphi(\beta) \end{cases}}$$

Preuve 17 : On considère F une primitive de f et on remarque alors que $Fo\varphi$ est une primitive de $fo\varphi.\varphi'$. On peut alors calculer les deux membres de l'égalité et montrer qu'ils sont égaux.

Remarque 17. On se souviendra de $\left\{\begin{array}{l} a=\varphi(\alpha) \\ b=\varphi(\beta)\end{array}\right.$ en se rappelant que α et β sont des valeurs particulières de t.

Situation 1 :

Pour calculer $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on pourra poser $\boxed{x=\varphi(t) \quad \mathrm{d}x=\varphi'(t)\,\mathrm{d}t}$

1. On détermine α et β tels que $a=\varphi(\alpha)$ et $b=\varphi(\beta)$
2. On vérifie que la fonction φ est de classe $\mathcal{C}^1$ de $[\alpha,\ \beta]$ vers $[a,b]$
3. Et on écrit la formule : $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_\alpha^\beta f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t$ (⚠ transformer les bornes !)

`Exemple 9.` Calculer les deux intégrales suivantes après avoir justifié leur existence.

1. $I_1=\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{1-x^2}\,\mathrm{d}x$
2. $I_2=\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Situation 2 : cas 1

Pour calculer $\displaystyle\int_\alpha^\beta f[\varphi(x)]\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$ on pourra poser $t=\varphi(x)$.

On écrit alors : $\left\{\begin{array}{l} t=\varphi(x) \\ \mathrm{d}t=\varphi'(x)\,\mathrm{d}x\end{array}\right.$ et on obtient $\displaystyle\int_{\varphi(\alpha)}^{\varphi(\beta)} f(t)\,\mathrm{d}t$.

`Exemple 10.` Calculer les deux intégrales suivantes :

1. $I=\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,\mathrm{d}x$.
2. $J=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3 x\,\mathrm{d}x$.

Situation 2 : cas 2 (très fréquent !)

Dans certains cas, il peut arriver que dans une intégrale du type $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$, on souhaite poser $t=\varphi(x)$.

Dans le cas où $\varphi'(x)\neq 0$ sur $[a,\ b]$ (cad : φ est bijective de $[a,\ b]$ dans $[\varphi(a),\ \varphi(b)]$), on peut écrire :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b \frac{f(x)}{\varphi'(x)}\varphi'(x)\,\mathrm{d}x$$

Il suffit alors de trouver une fonction g telle que $\frac{f(x)}{\varphi'(x)}=g[\varphi(x)]$ pour se ramener au cas précédent !
Cette mise en forme se fait naturellement si φ a été correctement choisie.

`Exemple 11.` $(*)$ Calculer les intégrales suivantes en choisissant un changement de variable adapté :

1. $I=\displaystyle\int_1^e \frac{\ln t\,\mathrm{d}t}{t+t(\ln^2 t)}$
2. $J=\displaystyle\int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos t\,\mathrm{d}t}{(1+\sin t)\sin t}$
3. $K=\displaystyle\int_1^e \frac{e^{2t}\,\mathrm{d}t}{e^t+1}$

Remarque 18. Comme le montre les deux exercices suivants, le changement de variables ne sert pas uniquement au calcul d'intégrales. Il peut aussi être utile pour étudier des propriétés d'une fonction définie par une intégrale.

Exercice : 12

$(*)$ Montrer à l'aide d'un changement de variable que :

1. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^2 x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 x\,\mathrm{d}x$.
   En déduire la valeur de ces intégrales.
2. $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos x\,\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\mathrm{d}x$.
   En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \ln(1+\tan x)\,\mathrm{d}x$.

Exercice : 13

$(*)$ Soit $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ et g la fonction définie par $g(x) = \displaystyle\int_0^x f(t+x)\ \mathrm{d}t$.
Montrer que $g \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ et calculer l'expression de g'..

Exercice : 14

$(*)$ Soit φ définie par $\forall x \in,\quad \varphi(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} \ln(1+t^2)\ \mathrm{d}t$.
Prouver que la fonction φ est définie sur $\mathbb{R}$ et admet pour axe de symétrie la droite d'équation $x = -\frac{1}{2}$.

Corollaire 18 : **Propriétés diverses obtenues par changement de variables**

1. $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(t-c)\ \mathrm{d}t$ (Invariance par translation)
2. Si f est paire sur $[-a,\ a]$, $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\ \mathrm{d}x = 2\int_0^a f(x)\ \mathrm{d}x$
3. Si f est impaire sur $[-a,\ a]$, $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\ \mathrm{d}x = 0$
4. Si f est T périodique, $\displaystyle\int_a^b f(x)\ \mathrm{d}x = \int_{a+T}^{b+T} f(t)\ \mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_0^T f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^{a+T} f(t)\ \mathrm{d}t$

Preuve 18 : Ces résultats (sauf le dernier) se démontrent en utilisant des changements de variable affines.
$\displaystyle\int_0^T f(x)\ \mathrm{d}x = \int_a^{a+T} f(t)\ \mathrm{d}t$ se prouve à l'aide de la relation de Chasles.

Théorème 19 : **Intégration par parties**

Soient deux fonctions $u,\ v : [a,\ b] \mapsto \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,\ b]$. Alors

$$\int_a^b u(t)v'(t)\ \mathrm{d}t = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t)v(t)\ \mathrm{d}t$$

Preuve 19 : Il suffit de calculer $(u.v)'$ et d'effectuer une intégration dont on pensera à justifier l'existence.

`Exemple 12.` $(*)$ Calculer $F(x) = \displaystyle\int_0^x \arctan t\ \mathrm{d}t$, $\quad G(x) = \displaystyle\int_1^x \ln t\ \mathrm{d}t$ et $\quad H(x) = \displaystyle\int_1^x t^2\cos t\ \mathrm{d}t$

Exercice : 15

$(**)$ Soit 2 entiers p et q tels que $0 < p < q$. Calculer $I_{p,q} = \displaystyle\int_a^b (x-a)^p(b-x)^q\ \mathrm{d}x$.

Exercice : 16

$(*)$ Soit $I_n = n\displaystyle\int_0^1 x^n f(x)\ \mathrm{d}x$ où f est une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0,1]$. Trouver la limite de I_n lorsque $n \to +\infty$.

Exercice : 17

$(*)$ Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,b]$.
Montrez que :

$$\int_a^b \sin(nt)f(t)\ \mathrm{d}t \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$$

Remarque 19. Parfois, une seule technique de calcul ne suffit pas... Comme dans l'exemple suivant, on peut être amené à utiliser alternativement le changement de variables et l'intégration par parties.

`Exemple 13.` Calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 3^{\sqrt{2t+1}}\ \mathrm{d}t$ en effectuant le changement de variables $x = \sqrt{2t+1}$.

6 Formules de Taylor.

Théorème Fondamental 20 : **Formule de Taylor avec reste intégrale**

Soit une fonction f de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^{n+1}}$ sur un intervalle I, et deux points $a,\ x \in I$. Alors

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + \int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t}$$

La quantité $R_n(x) = \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\ \mathrm{d}t$ est appelée le reste intégral.

Preuve 20 : On démontre facilement ce théorème par récurrence en utilisant une intégration par partie.

Remarque 20. Cette formule est très souvent utilisée en analyse : il faut la connaître parfaitement !!
On peut se souvenir du reste par comparaison de cette formule à $f(x) = f(a) + \displaystyle\int_a^x \frac{(x-t)^0}{0!} f'(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice : 18
$(**)$ Soit $g \in \mathcal{C}([0,\ 1],\ \mathbb{R})$.
Trouver toutes les fonctions $f \in \mathcal{C}^2([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ telles que $\begin{cases} f(0) = f(1) = 0 \\ f'' = g \end{cases}$.

Corollaire 21 : **Inégalité de Taylor-Lagrange (majoration du reste)**
Soit une fonction f de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^{n+1}}$ sur un intervalle I et un point $a \in I$.
Si $x \in I$, on peut écrire $f(x)$ comme somme du polynôme de Taylor et d'un reste $R_n(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + R_n(x)$$

avec le reste vérifiant la majoration suivante : $\boxed{|R_n(x)| \leq \frac{|x-a|^{n+1}}{(n+1)!} M_{n+1}(x)}$ où $M_{n+1}(x) = \sup_{t\in[a,x]} |f^{(n+1)}(t)|$.

Preuve 21 : On commence par justifier l'existence de $M_{n+1}(x)$ grâce à la continuité de $f^{(n+1)}$.
Puis, la majoration du reste s'effectue en utilisant la majoration célèbre : $|\int_a^b f| \leq \int_a^b |f|$ (lorsque $a \leq b$!!).

`Exemple 14.` $(*)$ Prouver que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $|e^x - 1 - x| \leq \frac{x^2}{2} e^{|x|}$

`Exemple 15.` $(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Majorer les quantités suivantes pour $x \in \mathbb{R}$. Qu'en déduire ?

1. $\left|e^x - (1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots + \frac{x^n}{n!})\right|$
2. $\left|\ln(1+x) - (x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots + (-1)^{n+1}\frac{x^n}{n})\right|$

Remarque 21. En cas d'oubli de cette majoration, on peut facilement refaire directement le raisonnement de la démontration ... Pour cela, il est bien entendu nécessaire de connaître parfaitement la formule de Taylor avec reste intégrale !!

Corollaire 22 : **Formule de Taylor-Young**
Soit f de $\boxed{\text{classe } \mathcal{C}^n}$ sur un intervalle I, et $a \in I$. Alors $\forall x \in I$,

$$\boxed{f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(x-a)^k}{k!} f^{(k)}(a) + o(x-a)^n}$$

Cette expression est un Développement Limité de f au voisinage de a à l'ordre n : DL$(a,\ n)$.

Preuve 22 :

1. Si la fonction f est $\mathcal{C}^{n+1}$, ce résultat est une conséquence immédiate du corollaire précédent.
2. Le cas où f est uniquement de classe $\mathcal{C}^n$ a été vu dans le cours sur les Développements Limités.

Remarque 22. Utilisation des formules précédentes :

1. La formule de Taylor avec reste intégrale ainsi que l'inégalité de Taylor-Lagrange permettent d'exprimer $f(x)$ en fonction des dérivées de f en a, pour tout les réels $x \in I$. On l'utilisera donc lors d'études *globales* de la fonction. Par exemple pour des majorations.

2. La formule de Taylor-Young quant à elle, donne une information *locale* sur le comportement de f au voisinage du point a (l'information sur le reste est une limite). On s'en servira donc pour le calcul de limites, d'équivalents et de développements limités au voisinage du point a.

Exercice : 19

(∗∗) Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^3$ sur le segment $[-1,\ 1]$.
Le but de cet exercice est de déterminer et de comparer des approximations de $f'(0)$ et de $f''(0)$.

A] Approximation de $f'(0)$:

Pour un réel positif h tel que $0 < h < 1$, on pose : $\boxed{\Delta_1(h) = \frac{f(h)-f(0)}{h} \quad \text{et} \quad \Delta_2(h) = \frac{f(h)-f(-h)}{2h}}$

1. Vérifier à l'aide de la formule de Taylor-Young que $\Delta_1(h)$ et $\Delta_2(h)$ tendent bien vers $f'(0)$ en 0.
   Laquelle des deux fonctions tend a priori plus rapidement vers $f'(0)$?
2. Contrôl de l'erreur :
   Déterminer à l'aide de la formule de Taylor un majorant de $|\Delta_1(h) - f'(0)|$ et de $|\Delta_2(h) - f'(0)|$.

B] Approximation de $f''(0)$:

Pour un réel positif h tel que $0 < h < 1$, on pose : $\boxed{\Delta_3(h) = \frac{f(h)-2f(0)+f(-h)}{h^2}}$.

Comme dans la question précédente :

1. Montrer avec Taylor-Young que $\Delta_0^3(h) \xrightarrow[h\to 0]{} f''(0)$.
2. Majorer avec Taylor la quantité $|\Delta_3(h) - f''(0)|$.

Remarque 23. Ces résultats montrent que l'on peut approximer les quantités $f'(0)$ et $f''(0)$ à l'aide des valeurs prises par la fonction f au voisinage de 0.

7 Sommes de Riemann

Soit une fonction f de classe $\mathcal{C}^1$ sur le segment $[a,\ b]$. Il s'agit de déterminer une approximation de $I = \displaystyle\int_a^b f(t)\ dt$

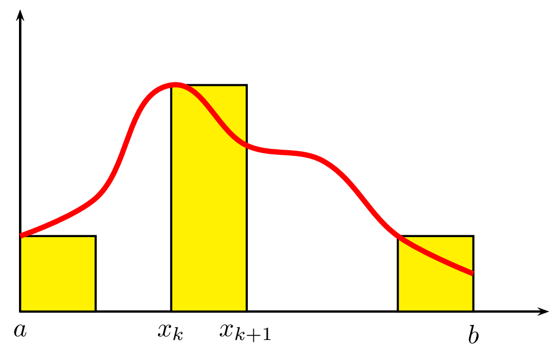


Figure 2 – Méthode des rectangles

Soit un entier $n \in \mathbb{N}$:
Soit R_n la somme des aires des rectangles de la figure précédente pour une subdivision à pas constant $p = \frac{b-a}{n}$.

Cette somme est donnée par la formule :

$$\boxed{R_n = \frac{b-a}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f(x_k)} \qquad \text{avec} \qquad x_k = a + k\frac{b-a}{n}$$

R_n est appelée *somme de Riemann.*

THÉORÈME 23 : **Majoration de l'erreur**

Soit $M_1 = \sup_{x\in[a,b]} |f'(x)|$.

R_n est une approximation de l'intégrale I et on a la majoration suivante de l'erreur $|I - R_n| \leq \dfrac{(b-a)^2}{2n} M_1$

Preuve 23 :

1. On utilise la relation de Chasles pour décomposer I le long de la subdivision.
2. On écrit chacun des termes de la somme R_n comme une intégrale entre les bornes x_k et x_{k+1}.
3. On regroupe les termes deux à deux et on utilise la formule de Taylor pour majorer chacune des différences obtenues.

THÉORÈME 24 : **Convergence d'une somme de Riemann**

Soit f une fonction continue par morceaux sur $[a,\ b]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ où $a < b$, alors :

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(a + k.\frac{b-a}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

Preuve 24 :

- Lorsque f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a,\ b]$, ce résultat est une conséquence directe du théorème précédent.
- On admettra le résultat lorsque f est uniquement continue par morceaux.

Remarque 24. La valeur de départ et d'arrivée de l'indice courant k n'a pas d'importance à un nombre fixé d'unités près. Le résultat reste donc inchangé si par exemple, k varie de 1 à n ou de 2 à $n-1$...

En pratique on utilisera essentiellement le résultat suivant :

Si f est une fonction continue par morceaux sur $[0,\ 1]$ à valeurs dans $\mathbb{R}$ alors :

$$\boxed{\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} \int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Dans les exercices, on cherchera donc à faire apparaître l'expression $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)$.

Pour cela, on fera apparaître le terme $\frac{1}{n}$ en facteur et le groupement $\frac{k}{n}$ dans la somme.

`Exemple 16.` $(*)$ Calculer les intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 x^2\,\mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 x^3\,\mathrm{d}x$ à l'aide de sommes de Riemann.

`Exemple 17.` $(*)$ Etudier les sommes de Riemann suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{n+k}$
2. $v_n = \displaystyle\sum_{p=1}^{n+1} \frac{\sqrt{n^2+p^2}}{n^2}$
3. $w_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{n^2+kn}}$

Exercice : 20

$(**)$ Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Etudier les suites de terme général :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \frac{k}{k^2+n^2}$

2. $v_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k}$

Aide : vous remarquerez qu'il s'agit de suites extraites d'une somme de Riemann.

Exercice : 21

(∗∗) Etudier les suites de terme général :

1. $w_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n-1} \frac{1}{2k+1}$

2. $v_n = \left(\dfrac{n!}{n^n}\right)^{\frac{1}{n}}$

Aide : vous procéderez par encadrements avec des intégrales.

8 Connaissez-vous votre cours ?

Vous devez impérativement savoir répondre aux différentes questions suivantes :

	Questions	Réponses attendues
1.	Rappelez les propriétés de base de l'intégrale de Riemann.	Linéarité - Chasles Croissance - Majoration
2.	Que faut-il impérativement vérifier lorsqu'on intègre une inégalité entre a et b ?	Continuité des f° $a < b$
3.	Que dire de l'intégrale d'une fonction continue positive ?	elle est positive > 0 si $f \neq 0$
4.	Que dire d'une fonction continue dont l'intégrale est nulle ?	Elle s'annule
5.	Quelles sont les deux majorations usuelles d'une intégrale ? Que faut-il vérifier ?	cf cours
6.	Comment est définie la valeur moyenne sur $[a,\ b]$ d'une fonction continue ?	$\dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(t)\ \mathrm{d}t$
7.	Donnez l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Quelle est l'idée de sa démonstration ?	cf cours
8.	Donnez l'inégalité de Minkowski. Quelle est l'idée de sa démonstration ?	cf cours
9.	Quel est le théorème qui prouve l'existence de primitives pour une f° continue ?	cf cours
10.	Que dit le théorème fondamental de l'intégration ?	cf cours
11.	Rappeler la méthode permettant l'étude d'une fonction de la forme $x \mapsto \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} f(t)\ \mathrm{d}t$?	cf cours
12.	Savez-vous calculer $I = \displaystyle\int_0^1 \sqrt{1+x^2}\ \mathrm{d}x$ et $J = \displaystyle\int_0^1 \frac{e^x}{1+e^x}\ \mathrm{d}x$ par chgt de var ?	$I = \frac{1}{2}(\sqrt{2} - \ln(\sqrt{2}-1)$

		$J = \ln \frac{1+e}{2}$
13.	A part effectuer le calcul d'une intégrale, à quoi peut aussi servir un chgt de var ?	Transformer une $\int$
14.	Savez-vous rédiger correctement une intégration par partie ? Quand doit-on penser à l'utiliser ?	cf cours Si f est $\mathcal{C}^1$
15.	Montrer que si $f \in \mathcal{C}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ on a : $\forall x \in \mathbb{R}^{+*},\ \displaystyle\int_0^1 f(xt)\ \mathrm{d}t = \frac{1}{x}\int_0^x f(t)\ \mathrm{d}t$	On pose $u = xt$
16.	Donnez la formule de Taylor avec reste intégrale et les hypothèses d'application. Quelle est l'idée de la démonstration ?	cf cours
17.	Par quoi le reste intégrale du développement de Taylor est-il majoré ?	cf cours
18.	Savez-vous prouver que $e^x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ et que $\ln(1+x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^n}{n}$	cf cours
19.	Qui y-a-t-il de particulier dans l'utilisation de la formule de Taylor-Young ?	Son caractère local !
20.	Qu'appelle-t-on une suite de Riemann ? Comment calculer sa limite ?	cf cours

9 Exercices de TD

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs $\heartsuit$ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs $\heartsuit$ correspond à la difficulté des exercices.

I] Divers

Il faut bien connaître son cours... et savoir utiliser éventuellement des résultats vus dans des chapitres antérieurs.

Exercice de TD : 1

($\heartsuit$) Soient $0 < x < y$. Prouver que : $\displaystyle |\int_x^y \frac{\sin t}{t}\ \mathrm{d}t| \leq \frac{2}{x}$.

Aide : on pourra envisager une intégration par partie.

Exercice de TD : 2

($\heartsuit\heartsuit$) Déterminer les fonctions f continues sur $\mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x \in \mathbb{R}$: $\displaystyle f(x) + \int_0^x (x-t)f(t)\ \mathrm{d}t = 1$.

Exercice de TD : 3

($\heartsuit\heartsuit$) **Formule de la Moyenne**

Soient f et g deux fonctions continues sur un segment $[a,\ b]$ et telles que g est positive.

Prouver qu'il existe $x_0 \in [a,\ b]$ tel que : $\displaystyle\int_a^b f(t)g(t)\ \mathrm{d}t = f(x_0)\int_a^b g(t)\ \mathrm{d}t$.

Exercice de TD : 4

$(***)$ Pour tout $x \in [0,\ 1[$, on écrit $x = 0, a_1a_2a_3\dots$ son développement décimal.

On définit alors la fonction f sur $[0,\ 1]$ par $\begin{cases} f(1) = 1 \\ f(0, a_1a_2a_3\dots) = 0, a_2a_1a_3a_4a_5a_6\dots \end{cases}$.

1. Montrer que f est continue par morceaux en exprimant f à l'aide de la fonction partie entière.
2. En déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^1 f$

Exercice de TD : 5

$(\heartsuit\heartsuit)$ Déterminer la partie entière de : $\quad S = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{10000}}$

Exercice de TD : 6

$(\heartsuit\heartsuit)$ Montrer que : $\quad \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x > \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \frac{\sin x}{x}\ \mathrm{d}x$.

Exercice de TD : 7

$(\heartsuit\heartsuit)$ Que dire de la fonction $f \in \mathcal{C}([a,\ b], \mathbb{R})$ vérifiant : $\quad |f| \leq 1$ et $\displaystyle\int_a^b f = b - a$?

II] Fonctions définies par une intégrale

> On utilise les techniques usuelles d'étude de fonctions ainsi que les propriétés d'encadrements ou de transformation des intégrales.
> Lorsque la fonction est de la forme $f(x) = \displaystyle\int_{u(x)}^{v(x)} w(t)\ \mathrm{d}t$, on pensera à exprimer $f(x)$ à l'aide d'une primitive W de la fonction w.

Exercice de TD : 8

$(\heartsuit)$ Montrer qu'au voisinage de $+\infty$ on a : $\quad \displaystyle\int_e^x \ln(\ln t)\ \mathrm{d}t \sim x\ln(\ln x)$.

Aide : on pourra envisager une IPP.

Exercice de TD : 9

$(\heartsuit)$ Montrer que : $\quad x > a > e \Rightarrow \displaystyle\int_a^x \frac{\mathrm{d}t}{\ln t} < \frac{2x}{\ln x}$.

Exercice de TD : 10

$(\heartsuit)$ Soit f une fonction continue sur $[0,\ 1]$ et g la fonction définie sur $[0,\ 1]$ par : $\quad g(x) = \displaystyle\int_0^1 \sup(x,\ t)f(t)\ \mathrm{d}t$.

Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ et calculer g'' en fonction de f.

Exercice de TD : 11

$(\heartsuit)$ On souhaite étudier la fonction définie par : $\quad F(x) = \displaystyle\int_x^{2x} \frac{\operatorname{ch} t}{t^2}\ \mathrm{d}t$

1. Démontrer que $D_F = \mathbb{R}^*$.
2. Etudier la parité de la fonction F.
3. Calculer la dérivée de F et dresser son tableau de variation.
4. Calculer les limites de F en 0 et en $+\infty$.

Exercice de TD : 12

$(***)$ **Calcul de** $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\ \mathrm{d}u$

Soient f et g les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{\frac{-x}{\cos^2 t}}\ \mathrm{d}t$ et $g(x) = f(x^2)$.

1. Prouver que $\forall u \in \mathbb{R}$, on a : $\quad |e^u - 1 - u| \leq \frac{u^2}{2}.e^{|u|}$
2. Soit $x \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^*$ et :

$$\Delta(h) = \frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{\frac{-x}{\cos^2 t}}}{\cos^2 t}\ \mathrm{d}t$$

   En utilisant la question précédente, majorer $|\Delta(h)|$ par une expression qui tend vers 0 lorsque $h \to 0$.
   En déduire que f est dérivable sur $\mathbb{R}$.

3. (a) Montrer que f tend vers 0 en $+\infty$.
   (b) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u = x\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{e^{-x^2\tan^2 t}}{\cos^2 t}\,\mathrm{d}t$
   (c) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = -2e^{-x^2}\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$. En déduire l'expression de $g(x)$.
   (d) En déduire la limite en $+\infty$ de $\displaystyle\int_0^x e^{-u^2}\,\mathrm{d}u$

Exercice de TD : 13

(♡♡) Soit : f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$ et $\varphi\ :\ \mathbb{R}^* \mapsto \mathbb{R}$ définie par $\varphi(x) = \dfrac{1}{2x}\displaystyle\int_{-x}^x f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ peut être prolongée par continuité en 0. On effectue ce prolongement.
2. Montrer que φ est dérivable sur $\mathbb{R}^*$ et pour tout x non nul, prouver que $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2x^2}\displaystyle\int_{-x}^x t.f'(t)\,\mathrm{d}t$.
3. Montrer que φ est dérivable en 0 et montrer que $\varphi'(0) = 0$.

   Aide : Remarquez que $\varphi'(x) = \dfrac{1}{2x^2}\displaystyle\int_{-x}^x t.(f'(t) - f'(0))\,\mathrm{d}t$

III] Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowsky

On pense à utiliser ces inégalités lorsqu'il s'agit de montrer des inégalités entre intégrales !!
Il s'agit alors de choisir correctement les fonctions f et g qui interviennent.

Exercice de TD : 14

(♡) Soient f et g deux fonctions réelles continues et positives sur $[0;1]$.
On suppose que $\forall x \in [0;1],\ f(x)g(x) \geq 1$.

1. Montrer que : $\Big[\displaystyle\int_0^1 f(t)\,\mathrm{d}t\Big]\Big[\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t\Big] \geq 1$
2. Etudier les cas d'égalité.

Exercice de TD : 15

(♡) Etant donnés deux réels a et b tels que $0 < a < b$, montrer que : $\displaystyle\int_a^b \frac{\mathrm{d}x}{x} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}}$.

Exercice de TD : 16

(♡♡) Soit $E = \mathcal{C}([a,\ b],\ \mathbb{R}^{+*})$.
Pour toute application $f \in E$, on pose $I(f) = \displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \frac{1}{f(x)}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour toute fonction f de E, on a : $I(f) \geq (a-b)^2$. Quand a-t-on égalité ?
2. Montrer plus précisément que $\{I(f) \mid f \in E\} = [(b-a)^2,\ +\infty[$.

   On pourra considérer $f(x) = e^{\alpha x}$.

IV] Calculs d'intégrales

Le calcul d'intégrale se fait à l'aide :

1. d'un changement de variables
2. d'une intégration par partie
3. des primitives usuelles

Exercice de TD : 17

(♡) Pour calculer une intégrale du type $\displaystyle\int_a^b f(x^n)\frac{\mathrm{d}x}{x}$, on peut poser $y = x^n$. Calculer ainsi $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(1+x^n)}\,\mathrm{d}x$ ($n \geq 1$).

Exercice de TD : 18

($*$) Soit $a \in \mathbb{R}^*$.

1. Calculer l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_{\frac{1}{a}}^{a} \frac{x \ln x}{(1+x^2)^2}\, \mathrm{d}x$.
   Aide : vous pourrez effectuer un changement de variable qui laisse les bornes de l'intégrale invariantes
2. En vous inspirant de la méthode précédente, calculer l'intégrale suivante : $I = \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1+\cos^2 x}\, \mathrm{d}x$

Exercice de TD : 19

(♡♡) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ sur le segment $[a; b]$.
Montrer que : $\displaystyle\int_a^b f(x)\, \mathrm{d}x = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] + \frac{1}{2}\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\, \mathrm{d}x$.

V] Suites d'intégrales

On utilise les techniques usuelles d'étude de suite et les propriétés spécifiques aux intégrales.

Exercice de TD : 20

(♡♡) **Les intégrales de Wallis.**

Soit la suite (I_n) définie par $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n t\, \mathrm{d}t$.

1. Montrer que $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n t\, \mathrm{d}t$ et que $I_n > 0$.
2. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+2} et I_n. En déduire I_{2n} et de I_{2n+1} en fonction de n.
3. Etablir que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $(n+1)I_{n+1}I_n = \frac{\pi}{2}$ et que $I_{n+2} \leq I_{n+1} \leq I_n$.
4. Déterminer un équivalent de I_n.

Exercice de TD : 21

(♡♡) Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose $u_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}$.

1. Calculer les 3 premiers termes de cette suite, puis montrer que (u_n) est strictement croissante.
2. Etablir que $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n}\, \mathrm{d}x = \frac{\ln 2}{n} - \frac{1}{n}\int_0^1 \ln(1+x^n)\, \mathrm{d}x$. En déduire que $(u_n) \mapsto 1$.
3. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln(1+x^n)\, \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$. En déduire que $u_n = 1 - \frac{\ln 2}{n} + o(\frac{1}{n})$.

Exercice de TD : 22

(∗∗) Soit f une fonction continue sur $[0,\ 1]$. Montrer que : $n\displaystyle\int_0^1 x^{n-1} f(x)\, \mathrm{d}x \xrightarrow[n\to+\infty]{} f(1)$.
Aide : on pourra décomposer l'intégrale sur $[0,\ x_0]$ *et* $[x_0,\ 1]$ *tel que* $|f(x) - f(1)| < \varepsilon$ *sur* $[x_0,\ 1]$.

Exercice de TD : 23

(♡♡♡) **Irrationnalité du nombre π.**
Nous allons procéder par l'absurde en supposant que $\pi = \frac{a}{b}$ avec $a,\ b \in \mathbb{N}^*$.
Introduisons la fonction polynômiale $P_n(x) = \frac{1}{n!}x^n(bx-a)^n$.

1. Montrer que P_n et ses dérivées successives prennent en 0 et en $\frac{a}{b}$ des valeurs entières.
2. Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on pose $I_n = \displaystyle\int_0^{\pi} P_n(t).\sin t\, \mathrm{d}t$. Montrer que $I_n \mapsto 0$.
3. Montrer que $I_n \in \mathbb{Z}$. Conclure.

VI] Sommes de Riemann

Nous avons déjà vu comment calculer des sommes ou comment étudier la limite d'une somme (souvent par encadrement). Le cours sur l'intégration nous offre une nouvelle technique : la reconnaissance d'une somme de riemann.
Si nous sommes en présence de la somme de Riemann $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=a}^{n+b} f(\frac{k}{n})$, nous pouvons utiliser le théorème qui dit (sous condition de continuité de la fonction f sur $[0,\ 1]$) qu'elle converge vers $\displaystyle\int_0^1 f(t)\, \mathrm{d}t$.
Parfois, mais c'est plus rare... les sommes de Riemann peuvent également servir à calculer une intégrale ou à prouver des propriétés par passage à la limite.

Exercice de TD : 24

($\heartsuit$) Déterminer la limite ou un équivalent de chacune des suites suivantes :

1. $u_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(n+k) - \ln n}{n+k}$
2. $v_n = \displaystyle\frac{\pi}{4}\sum_{k=1}^{n} \cos^2(\frac{k\pi}{n})$
3. $w_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{pn} \frac{1}{k}$ (avec $p \in \mathbb{N}^*$)

Exercice de TD : 25

($\heartsuit\heartsuit$) Soit f une application continue sur $[0,\ 1]$, strictement positive. Montrer que : $\displaystyle\int_0^1 \ln f(x)\ \mathrm{d}x \leq \ln \int_0^1 f(x)\ \mathrm{d}x$.

Aide : on pourra utiliser l'inégalité : $\ln(\frac{1}{n}(x_1 + \dots x_n)) \geq \frac{1}{n}\big(\ln(x_1) + \dots + \ln(x_n)\big)$ *valable pour tout* $x_k > 0$.

Exercice de TD : 26

($**$) Soient les 2 suites suivantes : $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}$ et $T_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

1. Montrer que les suites extraites (S_{2n}) et (S_{2n+1}) sont adjacentes.
2. Transformer l'expression de S_{2n} à l'aide de la suite (T_n) pour finalement faire apparaître une somme de Riemann. En déduire la limite de la suite (S_{2n}).

Exercice de TD : 27

($\heartsuit$) Déterminer la limite de la suite (u_n) de terme général : $u_n = \big(\frac{(2n)!}{n^n n!}\big)^{\frac{1}{n}}$

Exercice de TD : 28

($\heartsuit\heartsuit$) Soit $\alpha > 0$ et différent de 1.

Après avoir justifié son existence, calculer $\displaystyle\int_0^{2\pi} \ln(1 - 2\alpha\cos t + \alpha^2)\ \mathrm{d}t$ en utilisant les sommes de Riemann.

Exercice de TD : 29

($**$) Soient f et g deux fonctions continues sur $[0,\ 1]$ avec f positive.

Calculer la limite de : $S_n = \displaystyle\frac{1}{n}.\sum_{k=0}^{n-1} f(\frac{k}{n})g(\frac{1+k}{n})$.

Vous pourrez utiliser la continuité uniforme de g *afin de vous ramener à une somme de Riemann*

Exercice de TD : 30

($\heartsuit\heartsuit\heartsuit$) Oral de polytechnique.

Déterminer un équivalent au voisinage de $+\infty$ de la suite (u_n) telle que $u_n = \mathrm{Card}(\{(a,\ b) \in \mathbb{Z}^2 \mid \|(a,\ b)\| \leq n\})$.

VII] Formule de Taylor

La formule de taylor (avec majoration du reste) permet de simplifier l'expression d'une fonction lors d'une étude globale alors que l'utilisation des développements limités se limite à des problèmes locaux.

Exercice de TD : 31

($\heartsuit\heartsuit$) Calculer la limite de $\displaystyle\frac{1}{x}\int_0^x \frac{\arctan t}{t}\ \mathrm{d}t$ lorsque $x \to 0$.

Exercice de TD : 32

($\heartsuit\heartsuit$) Soit $0 < a < b$. Montrer que : $\displaystyle\int_{ax}^{bx} \frac{\sin t}{t^2}\ \mathrm{d}t \xrightarrow[x\to 0]{} \ln\frac{a}{b}$.

Aide : on pourra utiliser le théorème de majoration.

Exercice de TD : 33

($**$) Déterminer la limite de la suite de terme général : $u_n = \displaystyle\sum_{k=n}^{2n} \sin^2 \frac{1}{\sqrt{k}}$.

Aide : vous pourrez commencer par linéariser $\sin^2 x$ *puis transformer l'expression à l'aide de Taylor à l'ordre 2*

Exercice de TD : 34

($\heartsuit\heartsuit\heartsuit$) Soit $f \in \mathcal{C}([a,\ b],\ \mathbb{R}^{+*})$.

1. Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a : $(1+x) - \frac{x^2}{2}e^{|x|} \leq e^x \leq (1+x) + \frac{x^2}{2}e^{|x|}$.
2. En déduire la limite de (I_n) la suite de terme général $I_n = \Big(\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f^{1/n}(t)\ \mathrm{d}t\Big)^n$.

Exercice de TD : 35

(∗∗) Soit $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$ et $v_n = u_n + \frac{1}{n!}$.

1. Prouver en utilisant la formule de Taylor avec reste intégrale que : $u_n < e < v_n$.
2. Démontrer que u_n et v_n sont deux suites adjacentes.
3. En déduire :
   (a) que e est irrationnel.
   (b) un algorithme de calcul d'une approximation de e à ε près.

Exercice de TD : 36

(∗∗) Soit f une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $[0,1]$. On pose pour $x \in]0\ ;\ 1[$, $g(x) = \frac{f(x)-f(0)-x(f(1)-f(0))}{\sin(\pi x)}$.
Montrer que l'on peut prolonger g par continuité en 0 et 1.