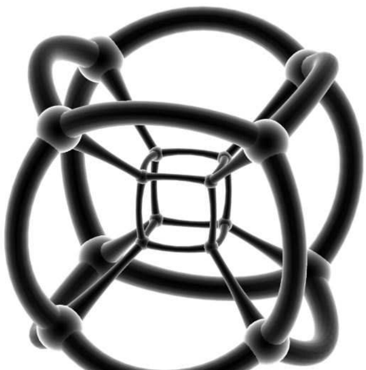
Les Espaces Vectoriels de dimension finie
Partie II

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

20 mars 2018



Le Tesseract : $(2x+1)^4 = 16x^4 + 32x^3 + 24x^2 + 8x + 1$

1 Existence de bases

Définition 1 : **ev de dimension finie**
On dit qu'un espace vectoriel E est de *dimension finie* si et seulement si il existe une famille génératrice $\mathcal{G} = (g_1, \dots, g_n)$ de E de cardinal fini. Par convention, on dit que $E = \{0\}$ est un espace de dimension finie.

`Exemple 1.` Pour $n \in \mathbb{N}^*$, $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_n[X]$ sont des espaces vectoriels de dimension finie.

Lemme 1 : **Retrait d'un vecteur redondant**
Soit une famille formée de $n+1$ vecteurs de l'espace E : $S = (x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \in E^{n+1}$.
Si le vecteur x_{n+1} est combinaison linéaire des autres vecteurs : $x_{n+1} \in \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$, alors on peut retirer le vecteur x_{n+1} sans modifier le sous-espace engendré par S :

$$\text{Vect}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) = \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$$

Preuve 1 : On procède par double inclusion.

1. $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n) \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1})$ est évident !
2. $\text{Vect}(x_1, \dots, x_n, x_{n+1}) \subset \text{Vect}(x_1, \dots, x_n)$ est facile à montrer !

Théorème Fondamental 2 : **Théorème de la base extraite**
De toute famille *génératrice* $\mathcal{G}$ de E on peut extraire une base de E.

Preuve 2 : Il suffit d'éliminer tous les vecteurs redondants.

`Exemple 2.` Si $G = \text{Vect}(\mathcal{G})$ avec $\mathcal{G} = \{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \}$ alors on peut extraire de $\mathcal{G}$ une base de G.

Corollaire 3 : **Existence de bases**
Tout espace vectoriel de dimension finie *non-nul* possède une base.

Preuve 3 : Immédiat.

Lemme 4 : **Augmentation d'une famille libre**
Soit $\mathcal{L} = (l_1, \dots, l_n)$ une famille libre de vecteurs d'un espace vectoriel E et un vecteur $x \in E$.
Si $x \notin \text{Vect}(\mathcal{L})$, alors la famille $\mathcal{L}' = (l_1, \dots, l_n, x)$ est encore libre.

Preuve 4 : Se démontre facilement par l'absurde.

Théorème Fondamental 5 : **Théorème de la base incomplète**
Toute famille libre $\mathcal{L}$ d'un espace de dimension finie E peut être complétée en une base de E.

Preuve 5 : On introduit une famille génératrice $\mathcal{G}$ quelconque.
Si il existe un vecteur de $\mathcal{G}$ n'appartenant pas à $\text{Vect}\,\mathcal{L}$ alors on l'ajoute à $\mathcal{L}$.
On procède ainsi tant qu'il reste des vecteurs de $\mathcal{G}$ n'appartenant pas à $\text{Vect}\,\mathcal{L}$.
La famille $\mathcal{L}$ obtenue est alors libre et génératrice. C'est donc une base de E.

`Exemple 3.` On peut par exemple compléter $\mathcal{L} = \{(1, 2, 0), (-1, 1, 0)\}$ pour obtenir une base de $\mathbb{R}^3$. Cf plus loin ...

Théorème Fondamental 6 : **Unicité de l'écriture d'un vecteur dans une base**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev, $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ une base de E. Alors,

$$\boxed{\forall x \in E, \ \exists\,!\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n \quad \text{tel que} \quad x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k.}$$

Les scalaires $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ sont alors appelés les *coordonnées* de x dans la base $\mathcal{B}$.

Preuve 6 : Très simple par l'absurde!!

2 Dimension d'un espace vectoriel

Afin de définir la dimension d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie, nous allons maintenant prouver que toutes les bases de E ont le même cardinal.

Lemme 7 :
Dans un espace engendré par n vecteurs $\{e_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$, toute famille $\{a_i\}_{i \in [\![1,n+1]\!]}$ de $n+1$ vecteurs est liée.

Preuve 7 : On commence par traduire le fait que les vecteurs $\{a_i\}_{i \in [\![1,n+1]\!]}$ sont CL des n vecteurs $\{e_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$.On obtient $n+1$ relations qui, après substitution, donnent une CL des vecteurs $\{a_i\}_{i \in [\![1,n+1]\!]}$.

Lemme 8 : **Le cardinal d'une famille libre est plus petit que celui d'une famille génératrice**
Si $\mathcal{L}$ est une famille libre et $\mathcal{G}$ une famille génératrice de E, on a

$$card(\mathcal{L}) \leq card(\mathcal{G})$$

Preuve 8 : Par l'absurde, on constate que ce lemme est un corollaire du lemme précédent.

Remarque 1. D'après ce théorème, pour montrer qu'un espace vectoriel n'est pas de dimension finie, il suffit d'exhiber une famille $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$ de vecteurs vérifiant :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \ (x_1, \dots, x_n) \text{ est libre}$$

`Exemple 4.` Montrer que $\mathbb{K}[X]$, $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\mathcal{F}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ ne sont pas de dimension finie.

Théorème Fondamental 9 : **Cardinal d'une base**
Si E est de dimension finie, toutes les bases de E ont même cardinal.

Preuve 9 : Il suffit de considérer deux bases de cardinal n et n' différents, puis d'appliquer le lemme précédent.

Définition 2 : **Dimension d'un ev**
Si $E = \{0\}$, on dit que E est de dimension 0 : $\dim E = 0$.

Si E est un espace vectoriel de dimension finie non-nul, on appelle *dimension* de E, le cardinal commun des bases de E et l'on note $\dim E = n$.

Ainsi, dans E un ev de dimension finie :

1. Si $\mathcal{L}$ est une famille libre de E, on a : $\operatorname{Card} L \leq \dim E$
2. Si $\mathcal{G}$ est une famille génératrice de E, on a : $\operatorname{Card} G \geq \dim E$

Méthode pour majorer ou minorer une dimension :

1. On obtient facilement une majoration de $\dim E$ en recherchant un famille génératrice
2. On obtient facilement une minoration de $\dim E$ en recherchant un famille libre

`Exemple 5.`

1. $\mathbb{K}^n$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n.
2. $\mathbb{K}_n[X]$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n+1$.
3. L'espace vectoriel des solutions d'une ED de la forme $y' + a(x)y = 0$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 1.
4. L'espace vectoriel des solutions d'une ED de la forme $y'' + ay' + by = 0$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2.
5. L'espace vectoriel des suites récurrentes vérifiant une relation de la forme $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$ (avec $b \neq 0$) est un $\mathbb{K}$-ev de dimension 2.

Remarque 2. La dimension dépend du corps de base.

1. Par exemple, $\mathbb{C}$ est un $\mathbb{C}$-ev de dimension 1, mais un $\mathbb{R}$-ev de dimension 2.
2. $(**)$ On note p_i le ième nombre premier.
   En vous intéressant à la famille $\mathcal{L}_n = \{\ln p_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$, montrer que le $\mathbb{Q}$-ev $\mathbb{R}$ n'est pas de dimension finie.

Exercice : 1

$(**)$ Soit E l'espace vectoriel des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
On considère F la partie de E constituée des applications de la forme : $x \mapsto P(x)\sin x + Q(x)\cos x$ avec $(P,\ Q) \in \mathbb{R}_2[X]$.

1. Montrer que F un sous-espace vectoriel de E.
2. Montrer que F est de dimension finie et déterminer $\dim F$.

Théorème 10 : **Caractérisation des bases**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie n et $S = (e_1, \dots,\ e_p)$ une famille de vecteurs de E.

1. S est une base de E ssi $\begin{cases} S \text{ est } \textit{libre} \\ p = n \end{cases}$.
2. S est une base de E ssi $\begin{cases} S \text{ est } \textit{génératrice} \\ p = n \end{cases}$.

Preuve 10 :

1. Les sens directs sont évidents !
2. (a) Si S est *libre* et $p = n$.
   Si S n'est pas une base alors il existe $x \notin \operatorname{Vect} S$. $S \cup \{x\}$ serait alors libre.
   Ce qui est impossible puisque $\dim E = n$.

   (b) S est *génératrice* et $p = n$.
   Si S n'est pas libre, alors l'un des vecteurs x de S d'exprime comme CL des autres.
   Dans ce cas, $S \backslash \{x\}$ serait aussi génératrice, ce qui est impossible.

Remarque 3. Pour montrer qu'une famille S est une base, on vérifiera le plus souvent que le système S est libre et $\operatorname{Card}(S) = \dim E$. Cela permet d'éviter de montrer que S est générateur, ce qui est parfois fastidieux.

`Exemple 6.` $(*)$ Soit $\mathcal{B} = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ une base d'un ev E. Soient $\left\{\begin{array}{l} \varepsilon_1 = e_1 + 2e_2 + 2e_3 \\ \varepsilon_2 = e_2 + e_3 \end{array}\right.$.

1. Montrer que $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$ est une famille libre de E.
2. Complèter cette famille pour obtenir une base de E.

`Exemple 7.` Famille de polynômes à degrés étagés.
Dans l'espace $E = \mathbb{R}_n[X]$, soit $S = (P_0,\ \dots,\ P_n)$ une famille de $n+1$ polynômes tels que $\forall i \in [0, n]$, $\deg P_i = i$.
Montrer que S est une base de E.

Rem : Cela prouve en particulier que $\forall a \in \mathbb{R},\ B = (1,\ (X-a),\ (X-a)^2, \dots,\ (X-a)^n)$ *est une base de* $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice : 2
$(*)$ Soit $E = \mathbb{R}^n$ et $S = (e_1,\ \dots,\ e_n)$ avec $e_1 = (1,\ 0,\ \dots,\ 0)$, $e_2 = (1,\ 1,\ 0\ \dots,\ 0)$, $\dots$, $e_n = (1,\ \dots,\ 1)$.

1. Montrer que S est une base de E.
2. Exprimer les coordonnées du vecteur $(x_1,\ \dots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$ dans la base S.

Exercice : 3
$(**)$ Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n et un endomorphisme $u \in L(E)$ nilpotent d'indice $p \in \mathbb{N}^*$: $\left\{\begin{array}{l} u^p = 0 \\ u^{p-1} \neq 0 \end{array}\right.$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $S = (x_0,\ u(x_0),\ \dots,\ u^{p-1}(x_0))$ soit une famille libre de E.
2. Qu'en déduire pour la valeur de p ?
3. Que dire si $p = n$?

THÉORÈME 11 : **Dimension d'un espace produit**
Si E et F sont deux ev de dimension finie,

$$\boxed{\dim(E \times F) = \dim E + \dim F}$$

Preuve 11 : Soit $(e_1,\ \dots,\ e_n)$ est une base de E et $(f_1,\ \dots,\ f_p)$ est une base de F.
Alors $\big((e_1,\ 0),\ \dots,\ (e_n,\ 0),\ (0,\ f_1),\ \dots,\ (0,\ f_p)\big)$ est une base de $E \times F$.

3 Sous-espaces vectoriels en dimension finie

Dans toutes la suite du chapitre, nous allons utiliser l'analogie suivante :

Un EV de dimension n est ANALOGUE à un ensemble fini de cardinal n.
Une base de E sera alors analogue aux éléments de E.
On considérera de plus que $F + G$ est analogue à $F \cup G$ et que $F \oplus G$ est analogue à $F \cap G = \emptyset$.

Nous verrons que cette analogie permet de conjecturer ou de retenir un assez grand nombre de résultats.

3.1 Dimension d'un sev

THÉORÈME 12 : **Dimension d'un sev**
Soit E un ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et F un sev de E.

$$F \text{ est alors de dimension finie} \quad \text{et} \quad \dim F \leq \dim E$$

Pouvait-on conjecturer ce résultat grâce à l'analogie précédente ?

Preuve 12 : Si F n'était pas de dimension finie, alors on pourrait trouver une famille libre de vecteurs de F de cardinal $p > n$. Cette famille serait aussi une famille libre de E. Or ceci est impossible car toute famille libre de vecteurs de E a un cardinal inférieur ou égal à n.
Donc F est de dimension finie et $\dim F \leq n$.

Remarque 4. Soit E un ev de dimension n et F un sev de E. Selon sa dimension, F porte des noms différents :

1. Si $\dim F = 1$ alors F est une droite vectorielle

2. Si $\dim F = 2$ alors F est un plan vectoriel
3. Si $\dim F = n-1$ alors F est un hyperplan vectoriel (F est aussi le noyau d'une forme linéaire non nulle)

`Exemple 8.` ($*$) Quelle est la nature des sev de $\mathbb{R}^2$ et de $\mathbb{R}^3$?

Corollaire 13 : Si F et G sont deux sev de E de dimension finie, alors : $F \subset G \Rightarrow \dim F \leq \dim G$.
Que pensez-vous de l'analogie avec les ensembles de cardinal fini ?

Preuve 13 : F est un sev de G.

Remarque 5. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ sont souvent donnés sous l'une des deux formes suivantes :

- Forme 1 : $F = \text{Vect}(e_1,\ \dots,\ e_p)$ avec $e_1,\ \dots,\ e_p \in \mathbb{R}^n$.
- Forme 2 : $F = \{(x_1,\ \dots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n \mid \left\{\begin{array}{l} f_1(x_1,\ \dots,\ x_n) = 0 \\ \dots \\ f_q(x_1,\ \dots,\ x_n) = 0 \end{array}\right.\}$ où $f_1,\ \dots,\ f_q \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^n,\ \mathbb{R})$.

Vous devez connaître la méthode permettant de passer d'une forme à l'autre : $(X \in F \iff \cdots \iff)$

`Exemple 9.` ($*$) Soient $F = \text{Vect}((1,\ 0,\ 2,\ 3),\ (-1,\ 0,\ 1,\ 1))$ et $G = \{(x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4 \mid \left\{\begin{array}{l} x+y-z=0 \\ x-2t=0 \end{array}\right.\}$.

1. Exprimer F sous la forme 2.
2. Exprimer G sous la forme 1.

Corollaire 14 : **Egalité de sev**
Soient F et G deux sev d'un même ev de dimension finie. Alors :

$$\boxed{\left\{\begin{array}{l} F \subset G \\ \dim F = \dim G \end{array}\right. \quad \Rightarrow \quad F = G}$$

En particulier, si F est un sev de E, alors : $\dim F = \dim E \Rightarrow F = E$.
Que pensez-vous de l'analogie avec les ensembles de cardinal fini ?

Preuve 14 : Si $F \subset G$ alors F est un sev de G. On considère alors une base de F...

Remarque 6. Ce résultat est TRES souvent utilisé pour montrer que deux sev F et G sont égaux.

Exercice : 4
($*$) Soient $F = \text{Vect}((1,\ 2,\ 3),\ (0,\ 1,\ 1))$ et $G = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y-z=0\}$ deux sev de $\mathbb{R}^3$.
Montrer que $F = G$ en utilisant deux méthodes différentes.

Exercice : 5
($*$) Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \text{Vect}((1,\ 1,\ \lambda,\ 3),\ (0,\ 1,\ 1,\ 2))$ $G = \{(x,\ y,\ z,\ t) \in E \mid x-y+z=0,\ x+2y-t=0\}$.
Trouver une CNS sur $\lambda \in \mathbb{R}$ pour que $F = G$?

3.2 Somme, somme directe et supplémentaires

Définition 3 : **Base adaptée à un sev**
La base $\{e_1,\ \dots,\ e_p, \dots,\ e_n\}$ de E est une *base adaptée* à un sev F lorsque $\{e_1,\ \dots,\ e_p\}$ est une base de F.

Remarque 7. En dimension finie, le théorème de la base incomplète nous assure qu'il est toujours possible de construire une base adaptée à un sev.

Théorème Fondamental 15 : **Base adaptée à une décomposition en sommes directes**
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ avec $n \geq 2$ et $\{F_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de sev de E de bases respectives $\mathcal{B}_{F_i}$.

$$E = F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n \quad \iff \quad \mathcal{B} = \bigcup_{i \in [\![1,n]\!]} \mathcal{B}_{F_i} \text{ est une base de } E.$$

Cette base $\mathcal{B}$ est alors appelée *base adaptée à la somme directe.*

Preuve 15 : **Par récurrence sur n.**
Pour l'initialisation :

$\Rightarrow$ On montre très facilement que $\mathcal{B}$ est une famille libre et génératrice.

$\Leftarrow$ On a facilement $E = F + G$, puis que $F \cap G = \{0_E\}$.

On peut également effectué un raisonnement par équivalences

COROLLAIRE 16 : **Caractérisation 1 des supplémentaires**
Soit E un ev de dimension finie. Soit F_1 et F_2 deux sev de E de bases respectives $\mathcal{B}_1$ et $\mathcal{B}_2$.

$$E = F_1 \oplus F_2 \iff \mathcal{B} = \mathcal{B}_1 \cup \mathcal{B}_2 \text{ est une base de } E.$$

Cette base $\mathcal{B}$ est alors appelée *base adaptée aux supplémentaires.*
Que pensez-vous de l'analogie avec les ensembles de cardinal fini ?

Preuve 16 : Immédiat.

Méthodes :

1. Pour déterminer un supplémentaire d'un sev
2. Pour prouver que deux sev sont supplémentaires

`Exemple 10.` $(*)$ Soit $E = \mathbb{R}^4$ et $F = \text{Vect}((1,\ 0,\ 1,\ 0),\ (1,\ 2,\ 0,\ 0))$. Trouver un supplémentaire de F dans E

`Exemple 11.` $(*)$ Soit $E = \mathbb{R}_3[X]$. Montrer que $F = \text{Vect}(1+X^2,\ X-2)$ et $G = \text{Vect}(X^3-2X,\ 5)$ sont supplémentaires.

COROLLAIRE 17 : **Dimension d'une somme directe**

$$E = E_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_p \quad \Rightarrow \quad \dim E = \dim F_1 + \dim F_2 + \cdots + \dim F_p$$

Preuve 17 : Immédiat compte-tenu du théorème précédent.

Remarque 8. Ainsi :

1. Les supplémentaires d'une droite vectorielle de $\mathbb{R}^3$ sont des plans vectoriels
2. En dimension finie ($\dim E = n$), les hyperplans de E sont de dimension $n-1$.

COROLLAIRE 18 : **Existence de supplémentaires en dimension finie**
En dimension finie, tout sev F admet des supplémentaires qui sont tous de même dimension.
Que pensez-vous de l'analogie avec les ensembles de cardinal fini ?

Preuve 18 : On utilise ici le théorème de la base incomplète en considérant une base de F que l'on complète pour obtenir une base de E. Les vecteurs ajoutés engendrent alors un sev supplémentaire de F dans E.
L'égalité des supplémentaires provient du corollaire précédent.

Remarque 9. Ne jamais parler *du* supplémentaire de F, car en général il en existe une infinité. Penser au cas où F est une droite vectorielle de $\mathbb{R}^2$ (voir figure 1).

Remarque 10. L'existence de supplémentaires en dimension infinie est admise par l'axiome de Zorn.

PROPOSITION 19 : **Dimension d'une somme de sev**
Soit $\{F_i\}_{i \in [\![1,n]\!]}$ une famille de sev de E.

On a alors :

$$\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) \leq \dim F_1 + \dim F_2 + \cdots + \dim F_n$$

Cas d'égalité :

$$\dim(F_1 + F_2 + \cdots + F_n) = \dim F_1 + \dim F_2 + \cdots + \dim F_n \iff F_1 \oplus F_2 \oplus \cdots \oplus F_n$$

Que pensez-vous de l'analogie avec les ensembles de cardinal fini ?

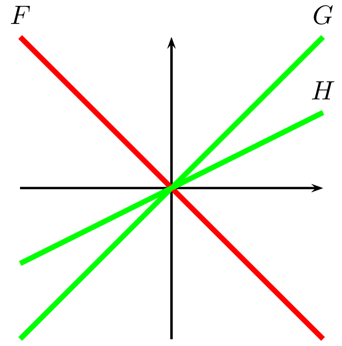


Figure 1 – H et G sont deux supplémentaires de F dans $\mathbb{R}^2$

Preuve 19 :

1. La réunion de bases des sev F_i constitue une famille génératrice de $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$.
2. $\Leftarrow$ Immédiat d'après un théorème précédent.

   $\Rightarrow$ $\mathcal{B} = \cup_{i\in[\![1,n]\!]}\mathcal{B}_{F_i}$ est alors une famille génératrice dont le cardinal est égal à la dimension de $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$. Il s'agit donc d'une base de $F_1 + F_2 + \cdots + F_n$. On applique alors la caractérisation des sommes directes.

Théorème 20 : **Formule de Grassmann**
Soit E de dimension finie et F, G deux sev de E. Alors :

$$\boxed{\dim(F+G) = \dim F + \dim G - \dim(F\cap G)}$$

Que pensez-vous de l'analogie avec les ensembles de cardinal fini ?

Preuve 20 : Soit $\mathcal{B}$ une base de $F\cap G$. On peut compléter $\mathcal{B}$ pour obtenir une base $\mathcal{B}\cup\mathcal{B}_F$ de F et une base $\mathcal{B}\cup\mathcal{B}_G$ de G. Montrons que $\mathcal{B}\cup\mathcal{B}_F\cup\mathcal{B}_G$ est une base de $F+G$.

1. Il est immédiat que $\mathcal{B}\cup\mathcal{B}_F\cup\mathcal{B}_G$ engendre $F+G$.
2. Pour la liberté de $\mathcal{B}\cup\mathcal{B}_F\cup\mathcal{B}_G$, on prend une combinaison linéaire nulle et on montre que l'élément de $\mathrm{Vect}(\mathcal{B}_G)$ est dans F et donc dans $F\cap G = \mathrm{Vect}\,\mathcal{B}$.

La formule à démontrer résulte alors du décompte des vecteurs de $\mathcal{B}\cup\mathcal{B}_F\cup\mathcal{B}_G$.

Exercice : 6

$(*)$ Soient F et G deux sev d'un ev E de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$.
Montrer que si $\dim F + \dim G > n$ alors $F\cap G$ contient un vecteur non nul.

Corollaire 21 : **Caractérisations 2 et 3 des supplémentaires**
Soit E un ev de dimension finie et F, G deux sev de E. Alors

$$\boxed{E = F\oplus G \iff \begin{cases} F\cap G = \{0\} \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases} \iff \begin{cases} E = F+G \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases}}$$

Preuve 21 : Pour la première équivalence :

$\Rightarrow$ Ces deux résultats sont donnés dans des théorèmes précédents.

$\Leftarrow$ Si $F\cap G = \{0\}$ alors d'après la formule de Grassmann, $\dim(F+G) = n$ et donc $F+G = E$.

La seconde équivalence est une conséquence directe de la caractérisation des sommes directes.

Remarque 11. En pratique, nous utiliserons le plus souvent la première équivalence.

`Exemple 12.` $(*)$ Soit $E = \mathbb{R}^4$, $F = \mathrm{Vect}((1,\ 2,\ 1,\ 1),\ (0,\ 1,\ 1,\ 1))$ et $G = \{(x,\ y,\ z,\ t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0 \text{ et } x = y\}$.
Montrer que $F\oplus G = E$.

Bilan des différentes caractérisations des supplémentaires

1. Dans le cas général :

   (a) $E = F \oplus G \Longleftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ \text{la décomposition d'un vecteur de } E \text{ est unique} \end{cases}$ (c'est la définition !)

   (b) $E = F \oplus G \Longleftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ F \cap G = \{0_E\} \end{cases}$

2. En dimension finie :

   (a) $E = F \oplus G \Longleftrightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}_F \cup \mathcal{B}_G$

   (b) $E = F \oplus G \Longleftrightarrow \begin{cases} F \cap G = \{0\} \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases}$

   (c) $E = F \oplus G \Longleftrightarrow \begin{cases} E = F + G \\ \dim E = \dim F + \dim G \end{cases}$

4 Applications linéaires en dimension finie

4.1 Comparaison des dimensions

Proposition 22 : **Comparaison des dimensions**
Soit $u : E \to F$ une application linéaire avec E et F des $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
On a alors :

1. Si u est injective alors : $\dim F \geq \dim E$
2. Si u est surjective alors : $\dim F \leq \dim E$
3. Si u est bijective alors : $\dim F = \dim E$

Preuve 22 : On utilise ce que l'on sait sur l'image d'une famille libre et génératrice par une AL.

Proposition 23 : **Dimension de l'image d'un sev par une application linéaire**
Soit E un ev de dimension finie et H est un sev de E alors :

$$\dim u(H) \leq \dim H \quad \text{et} \quad \dim u(H) = \dim H \text{ si } u \text{ est injective}$$

Preuve 23 : Il suffit de considérer l'image d'une base de H.

Corollaire 24 : **Espaces isomorphes**
Soient deux ev E et F de dimension finie.
On dit qu'ils sont *isomorphes* s'il existe un isomorphisme $\varphi : E \mapsto F$.
On a la caractérisation

$$E \text{ et } F \text{ isomorphes} \quad \Longleftrightarrow \quad \dim E = \dim F$$

Preuve 24 :

- $\Rightarrow$ Supposons que E et F soient isomorphes. On considère $\mathcal{B}$ une base de E et φ l'isomorphisme. φ étant un isomorphisme de E dans F, alors $\varphi(\mathcal{B})$ est une base de F. CQFD !
- $\Leftarrow$ Supposons que $\dim E = \dim F$ et prenons $(e_1, \ldots, e_n)$ une base de E et $(f_1, \ldots, f_n)$ une base de F. Soit alors φ l'application linéaire définie par $\forall i \in [\![1, n]\!]\ \varphi(e_i) = f_i$. D'après le théorème précédent, φ est un isomorphisme de E dans F. CQFD !

Remarque 12. Tout $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n est isomorphe à $\mathbb{K}^n$.

Théorème 25 : **Dimension de $L(E,\ F)$**
Si E et F sont de dimension finie, alors $L(E,\ F)$ est également de dimension finie et

$$\boxed{\dim L(E,\ F) = \dim E \times \dim F}$$

Preuve 25 : Admis pour l'instant ... (voir le cours sur les matrices !)

Remarque 13. En particulier, si l'espace E est de dimension finie, son dual $\mathcal{L}(E,\ \mathbb{K}) = E^\star$ est également de dimension finie et $\dim E^\star = \dim E$ (Voir la notion de *base duale* dans le cours de MP).

Exercice : 7
($**$) Soit E un ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $\mathcal{F} = (f_1,\ \dots,\ f_n)$ une famille de n formes linéaires sur E.
On suppose qu'il existe un vecteur non nul $a \in E$ tel que $\forall i \in [\![1, n]\!],\ f_i(a) = 0$.
Prouver que la famille $\mathcal{F}$ est liée.

4.2 La notion de Rang

Définition 4 : **Rang d'une famille finie de vecteurs**
Soit une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (x_1,\ \dots,\ x_n)$ d'un espace vectoriel E.
On appelle *rang* de la famille $\mathcal{F}$, la dimension du sous-espace vectoriel engendré par $\mathcal{F}$:

$$\mathrm{rg}(\mathcal{F}) = \dim \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$$

Définition 5 : **Application linéaire de rang fini**
Soit $u \in \mathcal{L}(E, F)$ avec E et F deux $\mathbb{K}$-ev.
On dit que l'application linéaire u est de *rang fini* lorsque $\mathrm{Im}\, u$ est de dimension finie.
Dans ce cas, le rang de u est défini par :

$$\mathrm{rg}(u) = \dim(\mathrm{Im}\, u) = \dim u(E)$$

Théorème 26 : **Détermination en dimension finie du rang d'une application linéaire.**
Si $u \in L(E,\ F)$ avec E de dimension finie et de base $(e_1,\ \dots,\ e_n)$.
Alors, u est de rang fini et :

$$\mathrm{rg}(u) = \mathrm{rg}(u(e_1),\ \dots,\ u(e_n)) \qquad \left(= \dim \big(\mathrm{Vect}(u(e_1),\ \dots,\ u(e_n))\big)\right)$$

Preuve 26 : Immédiat !

Proposition 27 : Soit $\left\{\begin{array}{l} E \text{ un K-ev de dimension finie } n \\ F \text{ un K-ev de dimension finie } p \end{array}\right.$ et $u \in \mathcal{L}(E, F)$. On a alors : $\mathrm{rg}(u) \leq \min(n,\ p)$.

Preuve 27 : On a :
1. $\mathrm{rg}(u) = \dim \mathrm{Vect}(u(e_1),\ \dots,\ u(e_n))$ avec $\mathrm{Vect}(u(e_1),\ \dots,\ u(e_n)) \subset F$
2. $\mathrm{rg}(u) = \dim u(E) \leq \dim E$

`Exemple 13.` ($*$) Déterminer le rang de l'application linéaire de $\mathbb{R}_n[X]$ dans $\mathbb{R}_n[X]$ qui à tout polynôme P associe P'.

Exercice : 8
($*$) Soient $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$ où E est une $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Prouver que :

$$\mathrm{rg}(u \circ v) \leq \min(\mathrm{rg}\, u,\ \mathrm{rg}\, v)$$

Exercice : 9
($**$) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie n, F un K-ev de dimension finie p et $u,\ v \in \mathcal{L}(E,\ F)$.
Montrer que

$$\big|\mathrm{rg}(u) - \mathrm{rg}(v)\big| \leq \mathrm{rg}(u + v) \leq \mathrm{rg}(u) + \mathrm{rg}(v)$$

Théorème 28 : **Conservation du rang par composition**
Soient E, F et G trois $\mathbb{K}$-ev de dimension quelconque.

1. Soit $u \in L(E,\ F)$ de rang fini et $f \in L(F,\ G)$ une application injective . On a alors : $rg(fou) = rg(u)$
2. Soit $u \in L(E,\ F)$ de rang fini et $f \in L(G,\ E)$ une application surjective. On a alors : $rg(uof) = rg(u)$

Preuve 28 :

1. Il suffit de remarquer qu'une application linéaire injective conserve la dimension d'un sev.
2. On a $\mathrm{Im}(uof) = u(\mathrm{Im}\, f) = u(E) = \mathrm{Im}\, u$.

Corollaire 29 : **Conservation du rang par un isomorphisme**.
Lorsque f est un isomorphisme et $u \in L(E,\ F)$ est de rang fini, alors :

$$rg(fou) = rg(u) \quad \text{et } rg(uof) = rg(u)$$

Preuve 29 : Immédiat.

Lemme 30 : **Supplémentaire du noyau**
Soit $u \in L(E,\ F)$, avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

Si S est un supplémentaire de $\ker u$ alors u induit sur S un isomorphisme de S dans $\mathrm{Im}\, u$.

Preuve 30 :
Soit $(e_{p+1},\ \dots,\ e_n)$ une base de S.
On montre alors assez facilement que $(u(e_{p+1}),\ \dots,\ u(e_n))$ est une base de $\mathrm{Im}\, u$.

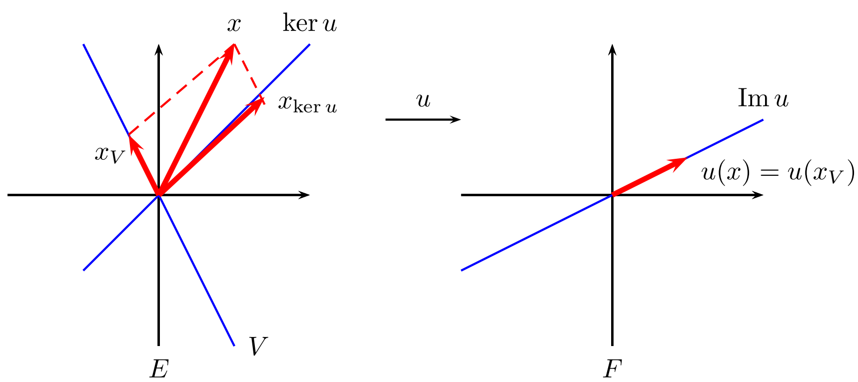


Figure 2 – Démonstration de la formule du rang : $E = \ker u \oplus V$ et $V \approx \mathrm{Im}\, u$

Théorème Fondamental 31 : **Théorème du rang**
Soit E un espace vectoriel de dimension finie, F un espace vectoriel quelconque et $u \in L(E,\ F)$.
On a alors la fomule suivante :

$$\boxed{\dim E = \dim \ker(u) + \mathrm{rg}\, u}$$

Preuve 31 : Conséquence immédiate du lemme précédent.

`Exemple 14.` $(*)$ Déterminer une base du noyau et de l'image des applications linéaires suivantes :

1. $f\ : \mathbb{R}^3 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,\ y,\ z) = (y - z,\ z - x,\ x - y)$
2. $f\ : \mathbb{R}^4 \mapsto \mathbb{R}^3$ définie par $f(x,\ y,\ z,\ t) = (2x + y,\ x + y + t,\ x + z - t)$
3. $f\ : \mathbb{C} \mapsto \mathbb{C}$ définie par $f(z) = z + i\overline{z}$ ($\mathbb{C}$ étant ici considéré comme un $\mathbb{R}$-ev).

Exercice : 10
$(*)$

1. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\dim \operatorname{Im} u^2 = \dim \operatorname{Im} u - \dim(\operatorname{Im} u \cap \ker u)$.
   Aide : on pourra considérer la restriction de u à $\operatorname{Im} u$.
2. Soit $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $\operatorname{rg}(v \circ u) = \operatorname{rg}(u) - \dim(\operatorname{Im} u \cap \ker v)$.
   Aide : s'inspirer de la méthode utilisée dans la question précédente.

Exercice : 11

($**$) Soit u et v deux endomorphismes d'un $\mathbb{K}$-ev de dimension n tels que $\operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v = \ker u + \ker v = E$.
Prouver que $\operatorname{Im} u$ et $\operatorname{Im} v$ sont supplémentaires, ainsi que $\ker u$ et $\ker v$.

Corollaire 32 : **Isomorphismes en dimension finie**
Soient deux espaces vectoriels E et F sur le corps $\mathbb{K}$ de *même dimension finie n.*
Soit une application linéaire $u \in L(E,\ F)$. Alors

$$u \text{ injective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ bijective}$$

Preuve 32 :

1. Supposons u injective.
   Alors $\ker u = \{0_E\}$ et d'après la formule du rang : $\dim \operatorname{Im} u = n$. $\operatorname{Im} u$ est donc un sev de F de même dimension que F. On a donc $\operatorname{Im} u = F$ et u est donc surjective. Et donc bijective !
2. Supposons u surjective.
   On utilise là encore la formule du rang.

Remarque 14. Ce théorème est bien entendu faux si les deux espaces n'ont pas la même dimension.

Corollaire 33 : Soient deux espaces vectoriels E et F sur le corps $\mathbb{K}$ de *même dimension finie n.*
Soit une application linéaire $f \in L(E,\ F)$. Alors

$$f \text{ est bijective} \iff \operatorname{rg}(f) = n$$

Exercice : 12

1. ($**$) On considère $(n+1)$ réels distincts $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ et l'application $\phi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_n[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}^{n+1} \\ P & \mapsto & \big(P(x_0),\ \dots,\ P(x_n)\big) \end{array}$
   (a) Montrer que ϕ est un isomorphisme.
   (b) En déduire que si $(y_0,\ \dots,\ y_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_n[X]$ tel que $\forall i \in [0,\ n]$, $P(x_i) = y_i$. Ce polynôme est alors appelé : *polynôme interpolateur de Lagrange.*

2. ($**$) Soient deux réels distincts $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ et quatre réels $(\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \gamma) \in \mathbb{R}^4$.
   En utilisant la méthode précédente, montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in \mathbb{R}_3[X]$ vérifiant

$$P(a) = \alpha,\ P'(a) = \beta,\ P(b) = \delta,\ P'(b) = \gamma$$

5 Endomorphismes en dimension finie

Exercice : 13

($**$) Soit E un K-ev de dimension finie n, et $u \in L(E)$. Montrer que : $\ker u = \operatorname{Im} u \iff \begin{cases} u^2 = 0 \\ n = 2\operatorname{rg}(u) \end{cases}$

Théorème Fondamental 34 : **Caractérisation 1 des automorphismes en dimension finie**
Soit un espace vectoriel E de dimension finie n et un endomorphisme $u \in L(E)$. On a :

$$\boxed{u \text{ bijective} \iff u \text{ surjective} \iff u \text{ injective}}$$

$$\boxed{u \text{ bijective} \iff \operatorname{rg}(u) = n \iff \ker u = \{0\}}$$

Preuve 34 : C'est une conséquence immédiate du théorème 32.

Remarque 15. Ce théorème est très utile en pratique. Si E est de dimension finie, alors pour prouver qu'un endomorphisme u de E est bijectif, il suffira de montrer qu'il est injectif (le plus facile puisqu'il s'agit simplement de prouver que $\ker u = \{0\}$).

Exercice : 14

($**$) Soit $E = \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in E$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $P \in E$ vérifiant $P' + P = Q$.

DÉFINITION 6 : Soit E un espace vectoriel et un endomorphisme $u \in L(E)$. On dit que

1. u est inversible à gauche ssi il existe $v \in L(E)$ tel que $v \circ u = \text{id}$.
2. u est inversible à droite ssi il existe $w \in L(E)$ tel que $u \circ w = \text{id}$.
3. u est inversible ssi il existe $u^{-1} \in L(E)$ tel que $u \circ u^{-1} = u^{-1} \circ u = \text{id}$.

THÉORÈME FONDAMENTAL 35 : **Caractérisation 2 des automorphismes en dimension finie**
Soit $u \in L(E)$.
Lorsque E est de dimension finie, on a la caractérisation :

$$\boxed{u \text{ inversible} \iff u \text{ inversible à gauche} \iff u \text{ inversible à droite}}$$

Dans ce cas, on a : $v = w = u^{-1}$.

Preuve 35 :

1. Si u est inversible à gauche, alors l'endomorphisme v tel que $v \circ u = \text{id}_E$ est surjectif.
   Comme E est de dimension finie, v est bijectif. Dans ce cas, $u = v^{-1}$ et u est bijectif.
2. De même si u est inversible à droite.

Remarque 16. Ce résulat est faux si l'on n'est pas en dimension finie comme le montre le contre-exemple suivant.
Soit $\mathcal{S}$ l'espace des suites réelles.
On définit deux endomorphismes (le " shift " à gauche et à droite) : $\left\{ \begin{array}{l} s_g : (a_0, a_1, \dots) \mapsto (a_1, a_2, \dots) \\ s_d : (a_0, a_1, \dots) \mapsto (0, a_0, a_1, \dots) \end{array} \right.$.
Etudier l'injectivité, la surjectivité de s_g, s_d. Calculer $s_g \circ s_d$. Conclure.

Exercice : 15

($*$) Soit E un K-ev de dimension finie n et $u, v \in L(E)$. Montrer que : $\quad u^2 \circ v - u \circ v \circ u + \text{id} = 0 \quad \Rightarrow \quad u \in GL(E)$

6 Les formes linéaires en dimension finie

DÉFINITION 7 : Soit E un $\mathbb{K}$-ev. On appelle *forme linéaire* sur E tout élément de $L(E,\ \mathbb{K})$.
$L(E,\ \mathbb{K})$ est appelé le *dual* de E et est noté E^*.

PROPOSITION 36 : **Formes coordonnées d'une AL relativement à une base**
Soit $u \in L(E,\ F)$ avec F de dimension finie de base $f = \{f_1,\ \dots,\ f_p\}$.
Alors il existe p formes linéaires $\{u_j\}_{j \in [\![1,p]\!]}$ telles que pour tout $x \in E$:

$$u(x) = u_1(x)f_1 + u_2(x)f_2 + \cdots + u_p(x)f_p$$

Les formes linéaires $u_j \in \mathcal{L}(E,\ \mathbb{K})$ sont appelées *formes coordonnées de* u relativement à la base f.

Preuve 36 : Pas de difficulté.

Remarque 17. On rappelle qu'un *hyperplan* de E est le noyau d'une forme linéaire non nulle de E.

THÉORÈME 37 : **Caractérisation des hyperplans en dimension finie**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension fini $n \in \mathbb{N}$, muni d'une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots,\ e_n)$.
On note $(x_1, \dots,\ x_n)$ les coordonnées d'un vecteur quelconque x de E dans cette base.

1. H hyperplan de $E \iff H$ admet une équation cartésienne de la forme $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} a_i.x_i = 0$ avec $\{a_i\} \in \mathbb{K}^{[\![1,n]\!]}$.
2. H hyperplan de $E \iff H$ a pour dimension $n-1$

Preuve 37 :

1. Evident compte-tenu du théorème sur la forme des formes linéaires dans une base.
2. $\Rightarrow$ Evident compte-tenu du théorème du rang.
   $\Leftarrow$ en remarquant qu'il existe une droite vectorielle supplémentaire.

`Exemple 15.` $(*)$ Soit $H = \{(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4) \in \mathbb{R}^4,\ 2x_1 - x_2 = x_4\}$. Montrer que H est un hyperplan de $\mathbb{R}^4$.

`Exemple 16.` $(*)$ Soit $H = \{(x,\ y,\ z) \in \mathbb{R}^3,\ x - 2y + 3z = 0\}$. Montrer que $\left\{\begin{array}{l} u(1,\ 2,\ 1) \\ v(-1,\ 1,\ 1) \end{array}\right.$ forment une base de H.

Exercice : 16

$(*)$ Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et H_1 et H_2, deux hyperplans distincts de E.
Calculer $\dim(H_1 \cap H_2)$.

Théorème 38 : **Intersection d'hyperplans**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. Soit $m \in [\![1, n-1]\!]$.

1. Si H_1, ..., H_m sont m hyperplans de E, alors :
$$n - m \leq \dim(H_1 \cap \cdots \cap H_m) \leq n - 1$$
2. "Réciproquement" : Tout sev F de dimension $n - m$ est l'intersection de m hyperplans.

Preuve 38 :

1. On procède par récurrence en utilisant la formule de Grassmann.
2. On considère une base de F que l'on complète pour obtenir une base de E.
   On considère alors les m hyperplans engendrés par les vecteurs de la base construite moins un des vecteurs ajoutés.

`Exemple 17.` Vérifier que ces résultats sont cohérents avec ce que vous savez intuitivement des droites vectorielles de $\mathbb{R}^2$ et des plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$.

7 Exercices de TD

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs ♡ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs ♡ correspond à la difficulté des exercices.

I] Bases, sous-espaces vectoriels en dimension finie

1. Une base est une famille libre et génératrice
2. Lorsqu'on souhaite prouver qu'un ensemble est un sev et qu'on nous demande d'en donner une base, on utilisera TOUJOURS la méthode du "Vect"
3. Une famille libre et une famille génératrice permettent d'obtenir un encadrement de la dimension d'un EV.
4. On reconnaît qu'une famille de vecteurs est une base au fait qu'elle est libre et que son cardinal est égal à la dimension de l'espace.
5. Connaître la formule de Grassmann qui donne la dimension de $F + G$.
6. En dimension finie, on prouve l'égalité de 2 sev en montrant une inclusion et en vérifiant l'égalité des dimensions.
7. Sev supplémentaires :
   En dimension finie nous avons une caractérisation à l'aide de bases permettant de vérifier facilement que deux sev sont supplémentaires ou de déterminer un supplémentaire d'un sev.

Exercice de TD : 1

(♡) Dans $\mathbb{R}^4$, montrez que les vecteurs $\left\{\begin{array}{l} u(1,\ 0,\ 0,\ 1) \\ v(2,\ 1,\ -1,\ 0) \end{array}\right.$ engendrent le même sev que les vecteurs $\left\{\begin{array}{l} r(3,\ 1,\ -1,\ 1) \\ s(5,\ 2,\ -2,\ 1) \end{array}\right.$.

Exercice de TD : 2

($\heartsuit$) Dans $E=\mathbb{R}^4$, on considère le sev : $F=\{(x,\ y,\ z,\ t)\ \in E \mid 2x-y+3z+t=0\}$.

1. Déterminez une base de F.
2. Déterminer un supplémentaire dans E.

Exercice de TD : 3

($\heartsuit$) Dans $E=\mathbb{R}^4$, on considère l'ensemble F des $X=(x,\ y,\ z,\ t)$ tels que : $\left\{\begin{array}{l} x+3y-2z-5t=0 \\ x+2y+z-t=0 \end{array}\right.$.

1. Montrer que F est un sev de E.
2. Déterminer sa dimension et un supplémentaire.

Exercice de TD : 4

($\heartsuit$) On considère les 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$: $u_1=(1\ ,\ -1\ ,\ -1)$, $u_2=(2\ ,\ -1\ ,\ 1)$ et $u_3=(1\ ,\ 0\ ,\ 2)$.

1. La famille $\{u_1\ ,\ u_2\ ,\ u_3\}$ est-elle libre ou liée ?
   Si elle est liée, formez une relation de dépendance linéaire entre ses vecteurs
2. Donnez une équation cartésienne de $\mathrm{Vect}(u_1,\ u_2,\ u_3)$.

Exercice de TD : 5

($*$) Dans $\mathbb{R}^4$, déterminer la dimension du sev engendré par $a=\begin{pmatrix}1\\2\\2\\1\end{pmatrix}$, $b=\begin{pmatrix}4\\3\\10\\5\end{pmatrix}$, $c=\begin{pmatrix}-1\\-3\\4\\0\end{pmatrix}$ et $d=\begin{pmatrix}0\\4\\11\\1\end{pmatrix}$.

La meilleure technique est ici d'appliquer l'algorithme du rang... vu dans le cours sur les matrices.

Exercice de TD : 6

($\heartsuit\heartsuit$) Soit E l'ev des polynômes à coefficients réels de degré ≤ 4.
On considère l'ensemble $F=\{P\in E \mid P(0)=P'(0)=P'(1)=0\}$.

1. Montrer que F est un sev de E.
2. Montrer que $G=\mathrm{Vect}(1,\ X,\ 1+X+X^2)$ est un supplémentaire de F dans E.

Exercice de TD : 7

($**$) Dans $E=\mathbb{K}_3[X]$ on considère les 3 sev suivants : $\left\{\begin{array}{l} F=\{P\in E \mid P(0)=P(1)=P(2)=0\} \\ G=\{P\in E \mid P(1)=P(2)=P(3)=0\} \\ H=\{P\in E \mid P(-X)=P(X)\} \end{array}\right.$.

1. Déterminer les dimensions respectives de F, G et H.
2. Montrer que $F\oplus G=\{P\in E \mid P(1)=P(2)=0\}$
3. Montrer que $E=F\oplus G\oplus H$.

Exercice de TD : 8

Polynômes d'interpolation de Lagrange

($\heartsuit$) Soit $(a_0,\ a_1,\dots,\ a_n)$, $n+1$ nombres complexes distincts. On note, pour $i\in[\![0,n]\!]$: $L_i=\displaystyle\prod_{j\in[\![0,n]\!]\setminus\{i\}}\frac{X-a_j}{a_i-a_j}$

1. Montrez que $(L_0,\ L_1,\dots,\ L_n)$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Précisez les coordonnées d'un polynôme P dans cette base.

Exercice de TD : 9

($\heartsuit\heartsuit$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$ et F un sous-espace vectoriel de E, distinct de E.
Montrer que F est l'intersection d'un nombre fini d'hyperplans de E.

Exercice de TD : 10

($**-***$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n\in\mathbb{N}^*$ et F et G deux sev de E.

1. $F\cup G$ est un sev ssi $F\subset G$ ou $G\subset F$.
2. En déduire que lorsque F et G sont de dimension $r\in[\![0,n]\!]$, il existe un sev H de E tel que $\left\{\begin{array}{l} E=F\oplus H \\ E=G\oplus H \end{array}\right.$.
   Aide : on pourra effectuer une récurrence descendante sur r

II] Les applications linéaires en dimension finie

1. Le théorème principal est le théorème du rang : $\operatorname{rg} u + \dim \ker u = \dim E$.
2. On retiendra également (conséquence immédiate du théorème précédent) que lorsque la dimension de l'espace d'arrivée est égale à celle de l'espace de départ, alors l'injectivité, la surjectivité et la bijectivité sont équivalentes.
3. Pour comparer les dimensions de sev, on pensera à utiliser le fait que :
   (a) Si $F \subset G$ alors $\dim F \leq \dim G$
   (b) Si u est une application linéaire et F un sev, alors $\dim u(F) \leq \dim F$ (égalité lorsque u est injective)

Exercice de TD : 11

(♡) Soit $E = \mathbb{R}^3$ et f l'endomorphisme de E défini par : $f((x,\ y,\ z)) = (-y + 3z,\ x + y,\ 2x + 2y)$

1. Vérifiez que f est bien linéaire
2. Précisez une base de son noyau et de son image.

Exercice de TD : 12

(♡) Soit $\varphi\ : \mathbb{K}_{n+1}[X] \mapsto \mathbb{K}_n[X]$ définie par $\varphi(P) = (n+1)P - XP'$.

1. Justifier que φ est bien définie et que c'est une application linéaire.
2. Déterminer le noyau de φ.
3. En déduire que φ est surjective.

Exercice de TD : 13

(♡♡) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension n et F, G deux sous-espaces vectoriels de E.
Former une condition nécessaire et suffisante sur F et G pour qu'il existe un endomorphisme u de E tel que $\operatorname{Im} u = F$ et $\ker u = G$.

Exercice de TD : 14

(∗∗) On considère l'application linéaire : $\varphi\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{R}[X] & \longrightarrow & \mathbb{R}[X] \\ P & \mapsto & P + P' + P'' \end{array}$.
Montrer que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice de TD : 15

(♡♡♡) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et f un endomorphisme de E.
On pose, pour tout entier k, $N_k = \ker f^k$ et $I_k = \operatorname{Im} f^k$.

1. Montrer que les suites (N_k) et (I_k) sont respectivement croissantes et décroissantes au sens de l'inclusion.
2. Que dire des suites des dimensions de N_k et des I_k ?
3. Prouver l'existence d'une valeur $r \in \mathbb{N}$ telle que $N_r = N_{r+1}$.
4. Montrer alors que $N_m = N_r$ et $I_m = I_r$ pour tous les $m \geq r$
5. En déduire que $\forall k \in \mathbb{N}$ tel que $k \geq r$, $N_k = N_r$, $I_k = I_r$ et $E = N_r \oplus I_r$.

Exercice de TD : 16

(∗∗) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie, f et g deux endomorphismes de E tels que : $\left\{ \begin{array}{l} gof = 0_{L(E)} \\ f + g \in GL(E) \end{array} \right.$.
Montrez que $\operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) = \dim E$.

Exercice de TD : 17

(♡♡) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et f et g des endomorphismes de E vérifiant : $\left\{ \begin{array}{l} f + g = \mathrm{id}_E \\ \operatorname{rg}(f) + \operatorname{rg}(g) \leq \dim E \end{array} \right.$.
Il s'agit de prouver que f et g sont des projecteurs de E.

1. En remarquant que $E = \operatorname{Im} f + \operatorname{Im} g$, démontrer que $\operatorname{Im} f \cap \operatorname{Im} g = \{0\}$.
2. En déduire que $f \circ g = 0$ puis que $f^2 = f$.
3. Conclure.

Exercice de TD : 18

(♡♡) Soit $E = \{f \in F(\mathbb{R}, \mathbb{R}) \mid f(x) = (a - b)e^x \cos x + (b - c)e^x \sin x + ae^x,\ \text{avec } (a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3\}$.

1. Montrez que E est un espace vectoriel de dimension finie et précisez sa dimension.

2. Soit D l'application telle que pour tout f de E, $D(f) = f'$.
   Vérifiez que D est un endomorphisme de E, puis montrez que D est inversible et déterminez D^{-1}.

Exercice de TD : 19

($\heartsuit\heartsuit$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}$ et f un endomorphisme de E tel qu'il existe un vecteur $x_0 \in E$ pour lequel la famille $\mathcal{B} = (x_0,\ f(x_0),\ \ldots,\ f^{n-1}(x_0))$ soit une base de E.
On note $\mathcal{C} = \{g \in \mathcal{L}(E) \mid fog = gof\}$.

1. Montrer que $\mathcal{C}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{L}(E)$.
2. Prouver que $\mathcal{C} = \{a_0 \operatorname{id}_E + a_1 f + \cdots + a_{n-1} f^{n-1} \mid a_0,\ \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{K}\}$.
   On pourra envisager de décomposer $g(x_0)$ où $g \in \mathcal{C}$ dans la base $\mathcal{B}$
3. Déterminer la dimension de $\mathcal{C}$.

Exercice de TD : 20

($\heartsuit\heartsuit$) Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie.
On souhaite prouver que :

$$\dim \ker f^2 \leq 2 \dim \ker f$$

1. Montrer qu'il existe F un sev de E tel que : $\ker f^2 = \ker f \oplus F$
2. Considérer $(f_1, \ldots,\ f_q)$ une base de F.
   Prouver que $(f(f_1), \ldots,\ f(f_q))$ est une famille libre de $\ker f$.
3. En déduire la relation recherchée.

Exercice de TD : 21

($**$) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie et E_1 et E_2, deux sev de E.
Montrez que : $\big(\exists u \in L(E)$ tel que $\ker u = E_1$ et $\operatorname{Im} u = E_2\big) \Longleftrightarrow \dim E = \dim E_1 + \dim E_2$.

Exercice de TD : 22

($**$) Soit E de dimension n.
Montrer que $\exists f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\operatorname{Im} f = \ker f \Longleftrightarrow n$ est pair.

Exercice de TD : 23

($**$) Soit $f \in \mathcal{L}(E,\ F)$ et $g \in \mathcal{L}(F,\ G)$ où E, F et G sont trois $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.

1. Montrer que $\ker(g_{|\operatorname{Im} f}) = \ker g \cap \operatorname{Im} f$
2. En déduire que $\operatorname{rg}(g \circ f) = \operatorname{rg} f - \dim(\ker g \cap \operatorname{Im} f)$
3. En déduire que $\operatorname{rg}(g \circ f) \geq \operatorname{rg} f + \operatorname{rg} g - \dim F$ puis que $\dim \ker f^2 \leq 2 \dim \ker f$ lorsque $f \in \mathcal{L}(E)$.

Exercice de TD : 24

($**$) Soient E et F de dimension n, G un sev de E et $\mathcal{H} = \{u \in \mathcal{L}(E,\ F) \mid G \subset \ker u\}$.

1. Soit $(e_1,\ \ldots,\ e_p)$ une base de G que l'on complète pour obtenir une base de E.

   Soit l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,\ F) & \longrightarrow & F^p \\ u & \mapsto & (u(e_1),\ \ldots,\ u(e_p)) \end{array}$. Montrer que $\mathcal{H} = \ker \varphi$.
2. En déduire que $\mathcal{H}$ est une sev de $\mathcal{L}(E,\ F)$ et déterminer sa dimension.

Exercice de TD : 25

($\heartsuit\heartsuit$) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$ et x, y deux vecteurs de E.

1. On suppose $(x,\ y)$ libre. Montrer alors qu'il existe un automorphisme u de E tel que $\left\{\begin{array}{l} u(x) = x \\ u(y) = x + y \end{array}\right.$
2. Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ qui commute avec tous les automorphismes de E.
   (a) Soit $x \in E$ non nul. Montrer que $(x,\ f(x))$ est une famille liée.
   (b) En déduire que f est une homothétie (voir l'exercice précédent).