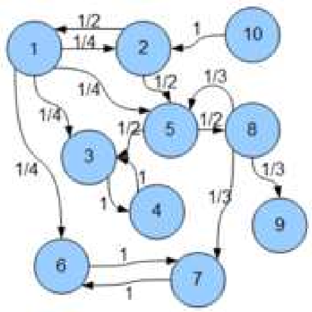
Les matrices

—

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

10 mai 2017



$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1/4 & 0 & 0 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1/4 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 1/4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1/2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1/3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Algorithme Pagerank de Google (chaîne de Markov)

Dans tout ce chapitre, $\mathbb{K}$ représentera le corps $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$ et $n,\ p \in \mathbb{N}^*$.

1 Définition d'une matrice

Définition 1 :
Soient deux entiers $n,\ p \geq 1$.

On appelle *matrice* $n \times p$ à coefficients dans $\mathbb{K}$, une application $A\ :\ \begin{array}{ccc} [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (i,\ j) & \mapsto & a_{ij} \end{array}$

que l'on note :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \text{ ou parfois } (a_{ij}) \text{ ou encore } (A_{ij})$$

le coefficient a_{ij} (ou A_{ij}) se trouve à l'intersection de la $\boxed{\text{ième ligne}}$ et de la $\boxed{\text{jième colonne}}$.
On note $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices $n \times p$ à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$.

Remarque 1.

1. Pour un indice de ligne $i \in [\![1,n]\!]$, on note $L_i = (a_{i1}, \dots,\ a_{ip}) \in \mathbb{K}^p$ le i^{ieme} *vecteur ligne* de A.
2. Pour un indice de colonne $j \in [\![1,p]\!]$, on note $C_j = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ le j^{ieme} *vecteur colonne* de A.

Remarque 2.

1. Si $n = p$ alors on parlera de matrice *carrée*
2. Si $n = 1$ alors on parlera de matrice *ligne*
3. Si $p = 1$ alors on parlera de matrice *colonne*

Remarque 3. Il est important d'utiliser dans la mesure du possible les conventions suivantes ! !

1. Pour les lignes :	on utilisera i comme indice courant	et	n pour le nombre de lignes
2. Pour les colonnes :	on utilisera j comme indice courant	et	p pour le nombre de colonnes

Un coefficient sera noté a_{ij}, le premier indice étant l'indice de ligne et le second étant l'indice de colonne.

Définition 2 : **Opérations sur les matrices**
On définit les opérations suivantes sur $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ (ce sont les opérations usuelles sur les applications).
Pour deux matrices $A,\ B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $\lambda \in \mathbb{K}$:

1. $A = B$ ssi $\forall (i,\ j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!],\ a_{ij} = b_{ij}$.
2. $A + B = (c_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $\forall (i,\ j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!],\ c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$.
3. $\lambda.A = (c_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ avec $\forall (i,\ j) \in [\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!],\ c_{ij} = \lambda.a_{ij}$.

Remarque 4. On appelera *matrice nulle* (notée 0), la matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ dont tous les coefficients sont nuls.

Définition 3 : **Matrices de la base canonique**
Pour deux indices $k \in [\![1, n]\!]$ et $l \in [\![1, p]\!]$, on définit la *matrice élémentaire* $E_{kl} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$E_{kl} \quad = \quad (\delta_{ik}\delta_{lj}) \quad = \quad \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$$

Tous les coefficients de la matrice E_{kl} sont nuls sauf celui qui se trouve à l'intersection de la ligne k et de la colonne l qui vaut 1.

Remarque 5. La valeur δ_{ij} est appelé le *symbole de Kroneker*. Il est définie de la façon suivante : $\begin{cases} \delta_{ij} = 0 \text{ si } i \neq j \\ \delta_{ij} = 1 \text{ si } i = j \end{cases}$

Théorème 1 : **L'ensemble des matrices est un $\mathbb{K}$-ev**
Muni des lois précédemment définies, l'ensemble $(\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \times p$.
La famille formée des $n \times p$ matrices E_{kl} est une base de cet ev, appelée *base canonique* de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

Preuve 1 :

1. $(\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}), +, .)$ est un $\mathbb{K}$-ev car c'est l'espace vectoriel de référence $(\mathcal{F}([\![1, n]\!] \times [\![1, p]\!],\ \mathbb{K}),\ +,\ .)$.
2. On montre facilement que $(E_{11},\ \dots,\ E_{np})$ est libre et que $\mathfrak{M}_{n\ p}(\mathbb{K}) = \mathrm{Vect}(E_{11},\ \dots,\ E_{np})$.

Remarque 6. On pourra penser à utiliser ces matrices E_{kl} dans certaines démonstrations.

Exercice : 1

$(*)$ Quelle est la dimension du $\mathbb{R}$-ev $\mathfrak{M}_2(\mathbb{C})$?

DÉFINITION 4 : **Transposée**
Soit une matrice $A = (A_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de taille $n \times p$.
On appelle *transposée* de la matrice A, la matrice ${}^tA \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ définie par :

$$\boxed{{}^tA = (({}^tA)_{ij}) \quad \text{où} \quad \forall (i,\ j) \in [\![1,p]\!] \times [\![1,n]\!], \quad ({}^tA)_{ij} = A_{ji}}$$

L'application $T\ :\ \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K}) \\ A & \mapsto & {}^tA \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve :

1. Pas de difficulté pour démontrer la linéarité de l'application T.
2. On démontre que T est une bijection en prouvant que $\ker T = 0_{\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})}$.

Remarque 7.

1. Notation : ${}^tA$ et aussi parfois noté A^T.
2. Pour trouver la transposée d'une matrice, il suffit d'inverser les lignes et les colonnes.

`Exemple 1.` On a par exemple : ${}^t\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

2 Matrice d'une application linéaire relativement à deux bases

DÉFINITION 5 : **Matrice d'un vecteur dans une base**
Soit un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n et une base $e = (e_1,\ \dots,\ e_n)$ de E.
Soit $a \in E$ un vecteur qui se décompose dans la base e en : $a = a_1e_1 + \cdots + a_ne_n$.

On appelle *matrice du vecteur a dans la base e*, la matrice colonne contenant les coordonnées de a dans la base e :

$$\mathrm{Mat}_e(a) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$$

Remarque 8.

1. Retenez que la matrice d'un vecteur dépend de la base e choisie. C'est pour cela qu'on la note $\mathrm{Mat}_e(a)$.
2. Les vecteurs de $\mathbb{K}^n$ se confondent avec leur matrice uniquement lorsque la base choisie est la base canonique.
   Exemple :

   Déterminer la matrice de $x = (1,\ 2,\ 3) \in \mathbb{R}^3$ dans la base canonique puis dans la base $e = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$.

PROPOSITION 2 : **Equivalence : vecteur/coordonnées**

Soit $\begin{cases} x,\ y,\ z \in E \\ \lambda,\ \mu \in \mathbb{K} \end{cases}$ et X, Y et Z leur matrice (coordonnées) respectives dans une base e de E.

On a :

$$z = \lambda x + \mu y \quad \Longleftrightarrow \quad Z = \lambda X + \mu Y$$

Preuve 2 : immédiat !

Définition 6 : **Matrice d'une famille de vecteurs dans une base**
Soit un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n et une base $e = (e_1,\ \dots,\ e_n)$ de E.
Soit $\mathcal{F} = (x_1,\ \dots,\ x_p)$ une famille de p vecteurs de E (ordonnée), qui se décomposent dans la base e sous la forme

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} x_{ij} e_i \quad \text{ce qui s'écrit aussi :} \quad \mathrm{Mat}_e\, x_j = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$$

On appelle matrice de la famille $\mathcal{F}$ dans la base e, la matrice $n \times p$ définie par :

$$\mathrm{Mat}_e(\mathcal{F}) = \mathrm{Mat}_e(x_1,\ x_2,\ \dots,\ x_p) = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Remarque 9.

1. Attention à utiliser des indices courants cohérents avec les notations du premier paragraphe.
2. La j^{eme} colonne de $\mathrm{Mat}_e(\mathcal{F})$ représente la matrice du vecteur x_j dans e.
3. Là encore, la matrice d'une famille de vecteurs dépend de la base e choisie.

`Exemple 2.` Soient P et Q deux polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$ définis par $P = X^2 + 1$ et $Q = X^2 + 3X - 5$.

1. Déterminez la matrice de $(P,\ Q)$ dans la base canonique de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. Déterminez la matrice de $(P,\ Q)$ dans la base $B = (1,\ (X-1),\ (X-1)^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Définition 7 : **Matrice d'une application linéaire dans deux bases**
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev de dimension p et n et $\left\{ \begin{array}{l} e = (e_1,\ \dots,\ e_p) \text{ une base de } E \\ f = (f_1,\ \dots,\ f_n) \text{ une base de } F \end{array} \right.$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E,\ F)$ une application linéaire définie par : $\forall j \in [\![1, p]\!]$, $\boxed{u(e_j) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} f_i}$.

On appelle, *matrice de u relativement aux bases e et f*, la matrice définie par :

$$\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = \mathrm{Mat}_f\left(u(e_1), \dots,\ u(e_p)\right) = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$$

Remarque 10.

1. Cette définition doit être PARFAITEMENT connue!!!
2. Par soucis de cohérence, il faut impérativement respecter les notations utilisées pour les indices!!
3. Si $u \in \mathcal{L}(E)$, on choisit en général $f = e$. On notera alors $\mathrm{Mat}_e(u)$ la matrice de u dans la base e.
4. Si e et f sont les bases canoniques de E et de F alors on dira que $\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ est *la matrice canonique* de u.
5. La matrice d'une forme linéaire est une matrice ligne (cf plus loin).
6. Si $u \in \mathcal{L}(E,\ F)$ avec $\dim E = p$ et $\dim F = n$, alors la matrice de u appartient à $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$.

`Exemple 3.`

1. Déterminer la matrice de l'application id_E dans la base $B = (e_1,\ \dots,\ e_n)$ de E un $\mathbb{K}$-ev.
2. Déterminer la matrice canonique de $D \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_4[X])$ défini par : $D\ :\ P \mapsto P'$.
3. Déterminer la matrice canonique de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\ \mathbb{R}^2)$ définie par : $\left\{ \begin{array}{l} x' = 2x - y + 3z \\ y' = x - 2z \end{array} \right.$ dans les bases canoniques.

Remarque 11. **Base adaptée à un projecteur :**
Soit p la projection d'un ev E sur F parallèlement à G ($E = F \oplus G$).
On appellera *base adaptée au projecteur p* une base e constituée en réunissant une base de F et un base de G.
Donner la matrice de p dans une telle base?
Comment définir la notion de *base adaptée* à une symétrie s?

PROPOSITION 3 : **Equivalence : application linéaire / matrice**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p de base e et F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n de base f.
Soient u, v et w des applications linéaires de E dans F de matrices respectives U, V et W dans e et f.
Soient $\lambda,\ \mu \in \mathbb{K}$.
Alors :

$$\boxed{w = \lambda u + \mu v \iff W = \lambda U + \mu V}$$

Preuve 3 : Pas de difficulté.

Remarque 12. En particulier, on a $u = 0 \iff U = 0$ et $u = v \iff U = V$.
On pourra donc, sans difficulté passer d'une égalité entre applications linéaires à une égalité matricielle.

THÉORÈME FONDAMENTAL 4 : $\mathcal{L}(E,\ F)$ **et** $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ **sont isomorphes**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension p de base e et F un $\mathbb{K}$-ev de dimension n de base f.

Alors l'application $\phi_{e,f} \ :\ \begin{array}{ccc} \mathcal{L}(E,\ F) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_{e,f}(u) \end{array}$ est un isomorphisme d'espaces vectoriels.

Preuve 4 :

1. $\mathcal{L}(E,F)$ et $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont bien des $\mathbb{K}$ espaces vectoriels.
2. On montre facilement qu'il s'agit bien d'une application linéaire.
3. On montre facilement que $\ker \phi_{e,f} = \{0_E\}$. D'où l'injectivité.
4. La surjectivité est quasi-immédiate.

Remarque 13.

1. Ce théorème est fondamental car il permet d'identifier matrices et applications linéaires.
   En d'autres termes, toute matrice peut s'interpréter comme une application linéaire, et toute application linéaire peut se représenter sous la forme d'une matrice. Après avoir, bien entendu, choisi les bases de départ et d'arrivée!!
2. Si A est une matrice de $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors l'unique application $u : \mathbb{K}^p \mapsto \mathbb{K}^n$ qui admet A pour matrice canonique est appelée *l'application linéaire canonique* associée à A.
3. Lorsque les bases e et f sont les bases canoniques de E et F, on dira que A est *la matrice canoniquement associée à l'application* u.

`Exemple 4.` Déterminer l'expression analytique de l'application linéaire canonique associée à la matrice : $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$.

COROLLAIRE 5 : **Dimension de** $\mathcal{L}(E,\ F)$
Si E et F sont deux ev de dimension finie, alors $\boxed{\dim \mathcal{L}(E,\ F) = \dim E \times \dim F}$

Preuve 5 :
D'après le théorème précédent, $\mathcal{L}(E,\ F)$ et $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ sont isomorphes avec $\mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de dimension finie.
On montre alors que $\mathcal{L}(E,\ F)$ est nécessairement de dimension finie.
On en déduit l'égalité des dimensions.

3 Produit matriciel

3.1 Définition et propriétés

Définition 8 : **Produit de matrices**
Soit deux matrices $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,q}(\mathbb{K})$ et $B = (b_{ij}) \in \mathfrak{M}_{q,p}(\mathbb{K})$.
On définit la *matrice produit* $AB = (c_{ij}) \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ par :

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!] \times [\![1,p]\!] \quad \boxed{c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}}$$

Produit matriciel :

Remarque 14.

1. ⚠ la multiplication de 2 matrices n'est possible que si le nombre de colonnes de la première est égal au nombre de lignes de la deuxième.
2. La formule donnant le terme c_{ij} d'un produit de matrices est très souvent utilisée en exercice ou dans les démonstrations. Il faut donc la retenir par coeur ! ! !

`Exemple 5.` $(*)$ Effectuer le produit de matrices suivant : $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice : 2
$(*)$

1. Le produit suivant est-il possible ? $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -2 & 4 \end{bmatrix}$
2. Quelle est la taille de la matrice résultat ? Effectuer le calcul.

Exercice : 3
$(*)$ Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{K})$.
A quelle condition les produits AB et BA sont-ils simultanément possibles ?
Que dire dans ce cas, des deux matrices produits obtenues ?

Exercice : 4
$(*)$ Soit $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$.

1. Vérifier que le produit de A^t par A est toujours possible.
2. Que dire des matrice A^tA et ${}^tAA$?
   (a) Taille ?
   (b) Eléments diagonaux ?
   (c) Symétrie par rapport à la première diagonale ?

PROPOSITION 6 : **Produits de matrices de la base canonique**

Soient $\begin{cases} E_{ab} \text{ une matrice de la base canonique de } \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ E_{cd} \text{ une matrice de la base canonique de } \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \end{cases}$. On a alors :

$$E_{ab} \times E_{cd} = \delta_{bc} E_{ad}$$

Preuve 6 : Simple calcul ...

PROPOSITION 7 : **Produits de matrices par blocs**

Soit $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $M' = \begin{pmatrix} A' & B' \\ C' & D' \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{pq}(\mathbb{K})$ telles que $\begin{cases} AA' + BC' \\ AB' + BD' \\ CA' + DC' \\ CB' + DD' \end{cases}$ existent.

On a alors :

$$MM' = \begin{pmatrix} AA' + BC' & AB' + BD' \\ CA' + DC' & CB' + DD' \end{pmatrix}$$

Preuve 7 : Non exigible en raison de la difficulté de la formalisation.

`Exemple 6.` (∗) Appliquer le théorème précédent sur un exemple.

Exercice : 5

(∗) Soit $A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & 1 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & 1 & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & \dots & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que $A_n^2 = \begin{pmatrix} n-1 & n-2 & \dots & \dots & n-2 \\ n-2 & \ddots & \ddots & n-2 & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & n-2 & \ddots & \ddots & n-2 \\ n-2 & \dots & \dots & n-2 & n-1 \end{pmatrix}$:

1. Par récurrence (pas très judicieux...)
2. Avec le produit matriciel

THÉORÈME 8 : **Matrice d'une composée d'applications linéaires**

On considère trois $\mathbb{K}$-ev E, F et G de dimensions respectives p, q et n et deux applications linéaires u et v :

$$E \xrightarrow{u} F \xrightarrow{v} G$$

Si e, f et g sont des bases de E, F et G, alors : $\mathrm{Mat}_{e,g}(v \circ u) = \mathrm{Mat}_{f,g}(v)\,\mathrm{Mat}_{e,f}(u)$.

Preuve 8 : Dans cette démonstrations, il faut choisir judicieusement les indices courants. On prendra :

1. j l'indice courant de la base e (cohérent avec le choix de p pour la dimension de E)
2. i l'indice courant de la base g (cohérent avec le choix de n pour la dimension de G)
3. k l'indice courant de la base f

On appellera alors :

1. A la matrice de v dans les bases f, g.
2. B la matrice de u dans les bases e, f.

Il faut alors déterminer pour tout $j \in [\![1, p]\!]$ l'expression de $v \circ u(e_j)$ dans la base g.

On montre alors que la i^{ieme} coordonnée de $v \circ u(e_j)$ n'est autre que $c_{ij} = \sum_{k=1}^{q} a_{ik} b_{kj}$.

PROPOSITION 9 : Avec les notations habituelles, on aura ainsi : $w = v \circ u \Longleftrightarrow W = VU$.
Ce qui nous permettra d'élargir l'application du principe du parapluie.

Remarque 15. Plus généralement, une combinaison linéaire de composées d'applications linéaires est équivalente à la même combinaison linéaire des produits de matrices correspondantes. Par exemple : $u \circ v + 2w = w \circ v \Longleftrightarrow UV + 2W = WV$.

Exercice : 6

($*$) Soit deux applications linéaires :

$$u : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ (x,\ y,\ z) & \mapsto & (x-y,\ x+y+z) \end{array} \quad \text{et} \quad v : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (x,\ y) & \mapsto & (x+y,\ x+2y,\ x-y) \end{array}$$

On note e la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et f la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

1. Ecrire $\text{Mat}_{e,f}(u)$ et $\text{Mat}_{f,e}(v)$
2. Ecrire $\text{Mat}_{e,e}(v \circ u)$ et $\text{Mat}_{f,f}(u \circ v)$
3. Donner les expressions analytiques de $u \circ v$ et $v \circ u$.

Exercice : 7

($*$) Démontrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^3$ dans une base e donnée.

Théorème 10 : **Propriétés de la multiplication**

1. **Associativité :** Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$ et $C \in \mathfrak{M}_{q,r}(\mathbb{K})$, on a : $A \times (B \times C) = (A \times B) \times C$
2. **Bilinéarité :** En prenant les matrices et les scalaires dans des ensembles adaptés, on a :
   (a) $A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
   (b) $(A + B) \times C = A \times C + B \times C$
   (c) $\lambda \cdot (A \times B) = (\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \cdot B)$
3. **Commutativité :** Qu'en pensez-vous ?....

Preuve 10 : Résultats immédiats en appliquant le principe du parapluie.

Proposition 11 : **Diviseurs de 0 et matrices nilpotentes**

1. Un produit de deux matrices non nulles peut être nul.
   On dit que ces deux matrices sont des *diviseurs de* 0.
2. Une matrice non nulle peut, élevée à une certaine puissance, devenir nulle.
   On dit qu'une telle matrice est une matrice *nilpotente*.

Preuve 11 :

1. Par exemple dans $\mathfrak{M}_4(\mathbb{R})$: $E_{12}E_{23} = 0$.
2. Par exemple $J = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ (On vérifie que $J^3 = 0$) ou encore $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix}$ (On vérifie que $A^2 = 0$).

Remarque 16. Une matrice nilpotente est un diviseur de 0.

Théorème 12 : **Transposée d'un produit**

Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K})$. Alors

$$\boxed{{}^t(AB) = {}^tB\,{}^tA}$$

Preuve 12 : Simple calcul.

3.2 Recherche du noyau et de l'image d'une application linéaire

Théorème 13 : **Écriture matricielle de l'image d'un vecteur par une application linéaire**

Soit deux $\mathbb{K}$-ev E et F de $\left\{\begin{array}{l}\text{dimensions respectives } p \text{ et } n\\ \text{bases respectives } e \text{ et } f\end{array}\right.$.

Soient : $x \in E$ et $X = \mathrm{Mat}_e(x)$ sa matrice dans la base e.
$u \in \mathcal{L}(E,\ F)$ et $U = \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ sa matrice dans les deux bases e et f.

$$\boxed{\text{La matrice de } u(x) \text{ dans } f \quad \text{est} \quad UX}$$

Preuve 13 : Il s'agit d'une simple vérification.

Remarque 17. On aura ainsi : $u(x) = v(x) \Longleftrightarrow UX = VX$

`Exemple 7.` $(*)$ Soit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X],\ \mathbb{R}^2)$ de matrice $U = \begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 3 & 2 & 1\end{pmatrix}$ dans les bases canoniques. Calculer $u(X^2 - X + 2)$.

Corollaire 14 :
Soient deux matrices $A,\ B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$. Alors on a l'équivalence suivante :

$$AX = BX \quad \forall X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \quad \Longleftrightarrow \quad A = B$$

Preuve 14 : Il suffit d'appliquer le principe du parapluie.

Remarque 18. Cette équivalence est la traduction de l'égalité des applications : $u = v \Longleftrightarrow u(x) = v(x) \quad \forall x \in D_f$.
ATTENTION !! Ce n'est pas parce que $AX_0 = BX_0$ pour un X_0 donné que $A = B$. Trouver un exemple !

Remarque 19. Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, on a alors : $A = 0 \Longleftrightarrow AX = 0 \quad \forall X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})$.

Exercice : 8
$(*)$ Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $u \in L(E)$ un endomorphisme tel que $\forall \phi \in E^\star,\ \phi \circ u = 0_{E^\star}$.
Montrer que $u = 0$.

Définition 9 : **Noyau et Image d'une matrice**
Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de vecteurs colonnes $A = (C_1,\ \ldots,\ C_p)$.
On appelle :
- *noyau de A* l'ensemble $\ker A = \{X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K}) \mid AX = 0\}$
- *image de A* l'ensemble $\mathrm{Im}\, A = \{AX \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \mid X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{K})\} = \mathrm{Vect}(C_1,\ \ldots,\ C_p)$

Remarque 20. Les colonnes d'une matrice engendrent son image et les lignes de la matrice donnent un système d'équations cartésiennes de son noyau.

`Exemple 8.` $(*)$ Déterminer le noyau et l'image de la matrice $A = \begin{pmatrix}2 & 0 & 4 & 1\\ 1 & 0 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 4 & 3\end{pmatrix}$.

Recherche du noyau et de l'image d'une application linéaire

Soit $u \in \mathcal{L}(E,\ F)$ où E et F sont deux $\mathbb{K}$-ev de $\left\{\begin{array}{l}\text{dimensions respectives } p \text{ et } n\\ \text{bases respectives } e \text{ et } f\end{array}\right.$.

Soit $A = \mathrm{Mat}_{e,f}(u)$ que l'on note $A = (C_1,\ \dots,\ C_p)$.

- si $x \in E$ on notera $X = \mathrm{Mat}_e(x)$ sa matrice dans la base e.
- si $y \in F$ on notera $Y = \mathrm{Mat}_f(y)$ sa matrice dans la base f.

1. **Recherche du NOYAU de** u : On a : $\boxed{x \in \ker u \Longleftrightarrow X \in \ker A}$ $(\Longleftrightarrow AX = 0)$
   Ainsi :
   (a) on détermine $\ker A$ sous la forme $\ker A = \mathrm{Vect}(U_1,\ \dots,\ U_q)$.
   (b) on en déduit que $\ker u = \mathrm{Vect}(u_1,\ \dots,\ u_q)$ avec $\forall k \in [\![1, q]\!]$, $u_k \in E$ tel que $U_k = \mathrm{Mat}_e(u_k)$.

2. **Recherche de l'IMAGE de** u : On a : $\boxed{y \in \mathrm{Im}\, u \Longleftrightarrow Y \in \mathrm{Im}\, A}$
   Ainsi :
   (a) on détermine $\mathrm{Im}\, A = \mathrm{Vect}(C_1,\ \dots,\ C_p)$ (en prenant soin d'éliminer les vecteurs redondants).
   (b) on en déduit que $\mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(c_1,\ \dots,\ c_p)$ avec $\forall k \in [\![1, p]\!]$, $c_k \in F$ tel que $C_k = \mathrm{Mat}_f(c_k)$.

Proposition 15 : Si $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ alors :

$$\dim \ker A + \dim \mathrm{Im}\, A = p$$

Preuve 15 : On introduit $u \in \mathcal{L}(\mathbb{K}^p,\ \mathbb{K}^n)$ canoniquement associé à A et on applique le théorème du rang.
On prouve que $\left\{\begin{array}{l}\dim \ker u = \dim \ker A\\ \dim \mathrm{Im}\, u = \dim \mathrm{Im}\, A\end{array}\right.$ à l'aide des isomophismes canoniques $\left\{\begin{array}{l} f : \mathbb{K}^p \to \mathfrak{M}_{p1}(\mathbb{K})\\ g : \mathbb{K}^n \to \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})\end{array}\right.$.

`Exemple 9.` $(*)$ On considère les deux applications linéaires suivantes :

$$f : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R}_1[X] \\ (x,\ y,\ z) & \mapsto & (x-z)+yX \end{array} \quad \text{et} \quad g : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_2[X] & \longrightarrow & \mathrm{Vect}\,(\cos,\ \sin) \\ a+bX+cX^2 & \mapsto & (a-c)\cos + b\sin \end{array}$$

1. Montrer que les matrices de f et g dans les bases canoniques sont égales à une même matrice A.
2. Déterminer $\ker(A)$ et $\mathrm{Im}(A)$.
3. En déduire les noyaux et images de f et g.

Exercice : 9

$(*)$ Soit la matrice : $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 4 \\ 1 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer $\ker A$ et $\mathrm{Im}\, A$.
2. On note u une application linéaire de matrice A.
   (a) Déterminer $\ker u$ et $\mathrm{Im}\, u$ dans le cas où $u \in \mathcal{L}(E,\ F)$ et e et f des bases de E et F.
   (b) Déterminer $\ker u$ et $\mathrm{Im}\, u$ dans le cas où $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}_2[X])$ et $e = (1,\ X-1,\ (X-1)^2)$.
   (c) Déterminer $\ker u$ et $\mathrm{Im}\, u$ dans le cas où $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3,\ \mathbb{R}_2[X])$ et les bases sont les bases canoniques

3.3 Rang d'une matrice

Définition 10 : **Rang d'une matrice**
Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $C_1,\ \dots,\ C_p \in \mathbb{K}^n$ ses vecteurs colonnes.
On appelle *rang* de la matrice A, le rang de la famille de vecteurs $\{C_1,\ \dots,\ C_p\}$ dans l'espace $\mathbb{K}^n$.
On a alors :

$$\mathrm{rg}\, A = \left\{\begin{array}{l}\dim \mathrm{Vect}(C_1,\ \dots,\ C_p)\\ \dim(\mathrm{Im}\, A)\end{array}\right.$$

Proposition 16 : **Le rang d'une matrice est le rang de l'application linéaire qu'elle représente**
Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Soit deux $\mathbb{K}$-ev E (dimension p) et F (dimension n) munis de deux bases e et f.
On sait qu'il existe une unique application linéaire $u \in \mathcal{L}(E,\ F)$ telle que $\mathrm{Mat}_{e,f}(u) = A$. Alors

$$\boxed{\mathrm{rg}(A) = \mathrm{rg}(u)}$$

Preuve 16 : Effectuée lors de la démonstration de la formule $\dim\ker A + \dim \mathrm{Im}\, A = p$.

Remarque 21.

1. Le rang de $u \in \mathcal{L}(E,\ F)$ n'est autre que le rang de sa matrice exprimée dans des bases e et f quelconques.
2. Pour toute matrice $M \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$, on a : $\mathrm{rg}\, M \leq \min(n,\ p)$.

Exercice : 10

Endomorphismes de rang 1

1. Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ de rang 1.
Montrer qu'il existe $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f^2 = \lambda f$.
2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Montrer que $\mathrm{rg}(A) = 1 \iff \exists (X,\ Y) \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})^2\ A = X\,{}^tY$

Définition 11 : **Matrice extraite**
Soit $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$.
On dit que B est une matrice extraite de A lorsqu'on obtient B en ne gardant que certaines lignes et colonnes de A.

`Exemple 10.` $(*)$ Combien peut-on contruire de matrices extraites à partir d'une matrice de $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$?

Proposition 17 : **Rang d'une matrice extraite**
Soit $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Tout matrice B extraite de A est de rang inférieur ou égal au rang de A.

Preuve 17 : Notons $r = \mathrm{rg}\, B$. B admet donc r colonnes linéairement indépendantes. On montre facilement que les r colonnes de A correspondant sont linéairement indépendantes et donc que $\mathrm{rg}\, A \geq r$.

Proposition 18 : **Evolution du rang par multiplication**
Soit $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $B_1 \in \mathfrak{M}_{pq}(\mathbb{K})$ et $B_2 \in \mathfrak{M}_{qn}(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{rg}(AB_1) \leq \mathrm{rg}\, A \quad \text{et} \quad \mathrm{rg}(B_2A) \leq \mathrm{rg}\, A$$

Preuve 18 : On applique le principe du parapluie.

4 L'algèbre des matrices carrées.

Définition 12 : **Matrice carrée**
On appelle *matrice carrée* d'ordre n à coefficients dans le corps $\mathbb{K}$, une matrice de taille $n \times n$.
On note $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n.

Dans le cas des endomorphismes, comme l'espace vectoriel de départ et d'arrivée sont les mêmes, on les munira pour simplifier, de la même base. D'où la définition suivante :

Définition 13 : **Matrice d'un endomorphisme dans une base**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $u \in L(E)$.
Soit une base $e = (e_1,\ \ldots,\ e_n)$ de E.
On appelle matrice de l'endomorphisme u dans la base e, la matrice de l'application linéaire u relativement aux bases e et e :

$$\mathrm{Mat}_e(u) = \mathrm{Mat}_{e,e}(u)$$

Exercice : 11

Soit $E = \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ et $A \in E$. On définit deux applications u et v par : $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \mapsto & AM \end{array}$ et $v : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ M & \mapsto & MA \end{array}$

1. Donner une base $\mathcal{B}$ de E.
2. Vérifier que $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$ et donner leur matrice dans $\mathcal{B}$.
3. Généraliser le résultat aux matrices d'ordre n.

4.1 Structure de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$

Nous savons déjà que $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ +,\ .)$ est un $\mathbb{K}$-ev.
Sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ la multiplication est une loi de composition interne.
Nous allons donc étudier ici la structure de $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ +,\ \times)$.

Définition 14 : **Matrice identité**

On appelle $I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice identité de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Remarque 22. Habituellement, la matrice d'un endomorphisme, dépend de la base choisie.
Cependant, si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, les endomorphismes $\lambda\,\mathrm{id}_E$ (avec $\lambda \in \mathbb{K}$) sont des exceptions puisqu'ils admettent pour matrice λI_n dans *n'importe quelle* base de E.

Théorème 19 : **L'algèbre $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$**
Muni des lois définies précédemment :

1. $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ +,\ .)$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n^2
2. $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ +,\ \times)$ est un anneau d'élément neutre I_n pour la multiplication.
3. $(\lambda \cdot A) \times B = A \times (\lambda \cdot B) = \lambda \cdot (A \times B)$.

Preuve 19 :

1. On sait que $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ +,\ .)$ est un $\mathbb{K}$-ev. Sa dimension est donnée par un théorème précédent.
2. Pour prouver que $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ +,\ \times)$ est un anneau, il reste à prouver que :
   • $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est stable par la multiplication. OK !
   • la multiplication est associative et qu'elle admet un élément neutre. OK !
   • la distributivité de la multiplication sur l'addition. OK !
3. Principe du parapluie

Remarque 23. Un ensemble qui admet ces 3 propriétés est appelée une $\mathbb{K}$ -*algèbre* associative et unitaire.

Théorème Fondamental 20 : **Identification des $\mathbb{K}$-algèbres $\mathcal{L}(E)$ et $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$**
Si E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension n muni d'une base e, alors l'application :

$\phi : \begin{array}{ccc} \big(\mathcal{L}(E), +, \cdot, \circ\big) & \longrightarrow & \big(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \cdot, \times\big) \\ u & \mapsto & \mathrm{Mat}_e(u) \end{array}$ est un isomorphisme d'anneau et d'espace vectoriel.

Preuve 20 : On sait déjà que ϕ est une bijection et que les ensembles d'arrivée et de départ sont des anneaux et des espaces vectoriels. Enfin, nous avons déjà vu que :

1. $\phi(\lambda u + \mu v) = \lambda\phi(u) + \mu\phi(v)$ 2. $\phi(u \circ v) = \phi(u).\phi(v)$ 3. $\phi(Id_E) = I_n$

DÉFINITION 15 : Si e est $\boxed{\text{la base canonique}}$ de $\mathbb{K}^n$:

1. L'application $\begin{array}{rccl} \phi : & \mathcal{L}(\mathbb{K}^n) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ & u & \mapsto & \mathrm{Mat}_e(u) \end{array}$ est appelé *l'isomorphisme canonique* de $\mathcal{L}(\mathbb{K}^n)$ sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
2. L'antécédent de $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ par ϕ est appelé l'endomorphisme canoniquement associé à A.

PROPOSITION 21 : **Les non-propriétés de l'algèbre $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$**

1. l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas *commutatif* : en général $AB \neq BA$
2. l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas *intègre* : $AB = 0 \not\Rightarrow A = 0$ ou $B = 0$
3. l'anneau $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas un corps.

Preuve 21 :

1. Il suffit de prendre un exemple.
2. Il suffit de prendre un exemple.
3. Conséquence des propriétés précédentes.

PROPOSITION 22 : **Formules**

Soit $p \in \mathbb{N}$ et $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $\boxed{AB = BA}$.
Puisque $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}), +, \times)$ est un anneau, on a :

1. $(A+B)^p = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{p}{k} A^k B^{p-k}$ (binôme)
2. $A^p - B^p = (A-B)(A^{p-1} + A^{p-2}B + \cdots + AB^{p-2} + B^{p-1})$
3. $(I_n - A^p) = (I_n - A)(I_n + A + A^2 + \cdots + A^{p-1})$

Preuve 22 : Il s'agit des formules usuelles valables dans tout anneau.

Remarque 24. On utilise souvent la formule du binôme pour calculer les puissances d'une matrice.
La dernière formule est intéressante lorsqu'une matrice est *nilpotente* : ($A^p = 0$).

4.2 Premiers par vers la réduction des endomorphismes

PROPOSITION 23 : **Stabilité et matrice par blocs**
Soit $u \in L(E)$ avec E de dimension finie.

1. Soit V un sev de E de dimension r et $\mathcal{B}$ une base adaptée à V. On a alors l'équivalence :
$$V \text{ est stable par u} \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u \text{ est de la forme } \begin{pmatrix} A & B \\ 0 & C \end{pmatrix} \text{ avec } A \in \mathfrak{M}_r(\mathbb{K})$$
2. Supposons que E est somme directe des sev $\{E_i\}_{i\in[\![1,p]\!]}$ de dimensions r_i et $\mathcal{B}$ une base adaptée à cette décomposition. On a alors l'équivalence :
$$\forall i \in [\![1,p]\!],\ E_i \text{ est stable par u} \iff \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u \text{ est de la forme } \mathrm{Diag}(A_1,\ \ldots,\ A_p) \text{ avec } A_i \in \mathfrak{M}_{r_i}(\mathbb{K})$$

Preuve 23 : Pas de difficulté.

4.3 Recherche de A^n

Exercice : 12

($*$) **Recherche de la puissance nième d'une matrice.**

1. ($*$) Soit deux scalaires $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & a \end{pmatrix}$. Déterminer la matrice A^n pour $n \in \mathbb{N}$.
2. ($*$) Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer les puissances nème de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$.

   En déduire les expressions des suites réelles (u_n) et (v_n) définies par $\begin{cases} u_{n+1} = u_n + v_n \\ v_{n+1} = -u_n \end{cases}$.
3. ($*$) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^2 + 2A - 3I_n = 0$. Déterminer A^n en fonction de A pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   On pourra pour cela, rechercher le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 + 2X - 3$.

Bilan des méthodes pour déterminer A^n :

1. Par conjecture / validation
2. A l'aide de la formule du binôme après avoir obtenu une décomposition judicieuse de A
3. A l'aide d'un polynôme annulateur
4. En montrant que A est semblable à une matrice simple... (voir la fin du chapitre)

Exercice : 13

1. ($*$) Déterminer la puissance nième de la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.
2. ($*$) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $A^3 - 4A^2 + 5A - 2I_n = 0$. Déterminer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4.4 Trace d'une matrice carrée

Définition 16 : **Trace d'une matrice**
Soit $A = (a_{i,j}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

On appelle *trace de la matrice* A, la somme de ses coefficients diagonaux : $\mathrm{Tr}(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$.

L'application Tr : $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \mapsto \mathbb{K}$ est une forme linéaire.

$$\mathrm{Tr}(\lambda A + \mu B) = \lambda\,\mathrm{Tr}(A) + \mu\,\mathrm{Tr}(B)$$

`Exemple 11.` ($*$) Trouver un supplémentaire de $\ker \mathrm{Tr}$.

Exercice : 14

($*$) Démontrer que : $\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ \mathrm{Tr}(AX) = \mathrm{Tr}(BX) \iff A = B$.

Proposition 24 : **Trace d'un produit**
Pour toute matrice $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Preuve 24 : Il suffit de faire le calcul.

Remarque 25. Vérifier sur un exemple que en revanche : $\mathrm{Tr}(ABC) \neq \mathrm{Tr}(ACB)$

Remarque 26. La trace constitue un outil parfois utile dans les raisonnements par Analyse/Synthèse.

Exercice : 15

($**$)

1. Déterminer toutes les matrices $X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que : $X + \mathrm{Tr}(X)A = B$.
2. Existe-t-il deux matrices $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant : $AB - BA = I_n$?

5 Matrices remarquables

5.1 Matrices scalaires

Ce sont des matrices de la forme : $M = \lambda I_n = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \lambda \end{pmatrix}$, où $\lambda \in \mathbb{K}$

Théorème 25 : L'ensemble des matrices scalaires est $\left\{ \begin{array}{l} \text{un sous-anneau} \\ \text{un sev} \end{array} \right.$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit alors que cet ensemble est une sous-algèbre de dimension 1 de l'algèbre $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ +,\ \times,\ .)$

Preuve 25 : Pour démontrer qu'il s'agit d'un sous-anneau et d'un sev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, il suffit de :

1. Prouver que cet ensemble contient I_n.
2. Prouver la stabilité par combinaison linéaire.
3. Prouver la stabilité par la multiplication.

Remarque 27. Quelle que soit la base e choisie, on a : $\mathrm{Mat}_e(\lambda\, \mathrm{id}_E) = \lambda I_n$.

5.2 Matrices diagonales

Ce sont des matrices de la forme : $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix} = \mathrm{Diag}(d_1,\ \dots,\ d_n)$ où $(d_1,\ \dots,\ d_n) \in \mathbb{K}^n$

Théorème 26 : L'ensemble des matrices diagonales est $\left\{ \begin{array}{l} \text{un sous-anneau} \\ \text{un sev de dimension } n \end{array} \right.$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Preuve 26 : Méthode précédente.

Remarque 28. On dit alors que cet ensemble est une sous-algèbre de dimension n de l'algèbre $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ +,\ \times,\ .)$

Proposition 27 : **Produit de matrices diagonales**
Le produit de deux matrices diagonales s'obtient en faisant le produit des éléments diagonaux :

$$\mathrm{Diag}(d_1,\ \dots,\ d_n) \times \mathrm{Diag}(d'_1\ \dots,\ d'_n) = \mathrm{Diag}(d_1 d'_1,\ \dots,\ d_n d'_n)$$
$$\mathrm{Diag}(d_1,\ \dots,\ d_n)^k = \mathrm{Diag}(d_1^k,\ \dots,\ d_n^k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Preuve 27 : Facile.

5.3 Matrices triangulaires

DÉFINITION 17 : **Matrice triangulaire supérieure**
Soit une matrice $U = (u_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit que cette matrice U est *triangulaire supérieure* ssi : $\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2, \quad i > j \Rightarrow u_{ij} = 0$.

Ce sont donc les matrices de la forme : $U = \begin{pmatrix} u_{11} & & \dots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & & \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & u_{nn} \end{pmatrix}$

Remarque 29. On a bien sûr une définition équivalente pour les matrices triangulaires inférieures.

THÉORÈME 28 :
L'ensemble des matrices triangulaires supérieures est $\left\{ \begin{array}{l} \text{un sous-anneau} \\ \text{un sev} \end{array} \right.$ de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension $\dfrac{n(n+1)}{2}$.

Preuve 28 :
1. Méthode usuelle.
2. On détermine la dimension en exhibant une base ...

Remarque 30.
1. On dit alors que cet ensemble est une sous-algèbre de l'algèbre $(\mathfrak{M}_n(\mathbb{K}),\ +,\ \times,\ .)$
2. En particulier, le produit de deux matrices triangulaires supérieures (resp. inférieures) est une matrice triangulaire supérieure (resp. inférieures).

`Exemple 12.` Sur un exemple de votre choix, vérifiez que le produit de deux matrices triangulaires supérieures est une matrice triangulaire supérieure.

Remarque 31. Une matrice à la fois triangulaire inférieure et supérieure est diagonale.

Exercice : 16
$(**)$ Soit $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que : $i \geq j \Rightarrow a_{ij} = 0$. Montrer que $A^n = 0$.
Aide : on pourra introduire l'endomorphisme canoniquement associé.

5.4 Matrices symétriques, antisymétriques

DÉFINITION 18 : **Matrices symétriques, antisymétriques**

1. On dit qu'une matrice carrée A est *symétrique* ssi ${}^tA = A$.
   On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des matrices symétriques.
2. On dit qu'une matrice carrée A est *antisymétrique* ssi ${}^tA = -A$.
   On note $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des matrices antisymétriques.

Remarque 32. La matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ est symétrique et la matrice $B = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -2 & 0 & 5 \\ 3 & -5 & 0 \end{pmatrix}$ est antisymétrique.

Remarque 33. Les éléments diagonaux d'une matrice antisymétrique sont tous nuls.

Remarque 34. $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont stables par CL mais ne sont pas stables par la multiplication.

Exercice : 17
$(*)$ Soient $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ deux matrices symétriques.
1. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur A et B, pour que le produit AB soit encore symétrique.

2. Les puissances successives de A sont elles symétriques ?
3. Si A est inversible, A^{-1} est elle symétrique ?

Exercice : 18

1. $(*)$ Prouver que $\mathcal{S}_n$ et $\mathcal{A}_n$ sont deux sev supplémentaires de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
2. $(*)$ Prouver que l'application "transposition" est une symétrie vectorielle de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Déterminer ses sev caractéristiques.

6 Le groupe des matrices inversibles.

Définition 19 : **Matrice inversible**
Soit une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
On dit qu'elle est *inversible* si et seulement si il existe une matrice $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telle que

$$AB = BA = I_n$$

La matrice B est alors appelée l'*inverse* de A et est notée $B = A^{-1}$.
On note $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices inversibles.

Théorème 29 : **Elles forment un groupe**
L'ensemble des matrices inversibles $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ est un groupe d'élément neutre la matrice identité I_n.

Preuve 29 : Il n'existe pas de groupe connu dont $(\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times)$ serait un sous-groupe.
Il faut par conséquent, redémontrer chaque propriété une à une (non vide, stabilité par la multiplication, associativité, élément neutre, élément symétrique).

Remarque 35.
1. Bien entendu, le groupe des matrices inversibles de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ n'est pas commutatif ! !
2. Ce groupe est appelé le *groupe linéaire.*

Théorème 30 :
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et e une base de E.

L'application $\begin{array}{rccc} \phi_e : & (\mathcal{GL}(E), \circ) & \longrightarrow & (\mathcal{GL}_n(\mathbb{K}), \times) \\ & u & \mapsto & \mathrm{Mat}_e(u) \end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Preuve 30 : Pas de difficulté.

Remarque 36. Si $U = \mathrm{Mat}_e\, u$ alors $U^{-1} = \mathrm{Mat}_e\, u^{-1}$.

Théorème 31 : Si A et B sont deux matrices $\mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$, alors : $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$ et $(A^{-1})^{-1} = A$.

Preuve 31 : Pas de difficulté du fait de l'associativité de la multiplication !

Détermination de l'inverse d'une matrice à l'aide d'un système
Soit $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$. Si X et $Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ sont tels que : $Y = AX$, on a alors $X = A^{-1}Y$.

Pour trouver la matrice A^{-1}, il suffit donc de résoudre le système $Y = AX$.

Si pour certaines valeurs de Y, ce système n'admet pas une unique solution, alors A n'est pas inversible.

Preuve 31 : Nous avons :

$$\begin{array}{rcl} A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) & \iff & \forall y \in \mathbb{K}^n,\ \exists! x \in \mathbb{K}^n \text{ tel que } y = a(x) \\ & \iff & \forall Y \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}),\ \exists! X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K}) \text{ tel que } Y = AX \end{array}$$

Dans le cas où la propriété est vérifiée, on obtient alors $X = A^{-1}Y$ ce qui permet de trouver A^{-1}.

`Exemple 13.` ($*$) Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice : 19

($*$) Déterminer l'inverse de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & \dots & \dots & 1 \\ 0 & 1 & \dots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Théorème Fondamental 32 : **Caractérisations des matrices inversibles**
Soit une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :

1. $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$.
2. A est inversible à gauche : $\exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tq $BA = I_n$ et dans ce cas, $B = A^{-1}$.
3. A est inversible à droite : $\exists B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ tq $AB = I_n$ et dans ce cas, $B = A^{-1}$.
4. $\ker A = \{0\}$.
5. $\text{rg}(A) = n$.

On verra aussi dans le cours sur les déterminants que : $A \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K}) \iff \det A \neq 0$.

Preuve 32 :
• En utilisant l'endomorphisme canoniquement associé à A, on démontre facilement que chacune des propriétés 2), 3), 4) et 5) impliquent que la matrice A est inversible.
• La réciproque est facile.

`Exemple 14.` ($*$) Démontrer que la matrice suivante est inversible : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice : 20

($*$) **Utilisation d'un polynôme anulateur** Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que la matrice A annule le polynôme : $P = X^3 - 3X^2 + X - 5$.
2. En déduire que A est inversible et déterminer son inverse.

Exercice : 21

1. ($*$) Soient deux matrices carrées non nulles $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ vérifiant $AB = 0$.
   Montrer qu'aucune des 2 matrices n'est inversible.
2. ($*$) Soit une matrice carrée $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ inversible.
   Montrer que la matrice ${}^tA$ est inversible et déterminer son inverse $\left({}^tA\right)^{-1}$.

Exercice : 22

($**$) Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ antisymétrique. On pose $M = I + A$.

1. Soit une matrice colonne $X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Calculer la matrice ${}^tXAX$
2. En déduire que la matrice M est inversible.

Exercice : 23

($**$) On considère une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $A = (a_{ij})_{1 \leq i,j \leq n}$ à *diagonale dominante* :

$$\forall i \in [\![1, n]\!]^2, \quad |a_{ii}| > \sum_{j=1\ (j \neq i)}^{n} |a_{ij}|$$

Montrer que la matrice A est inversible.

COROLLAIRE 33 : Une matrice triangulaire est inversible ssi ses termes diagonaux sont tous non nuls.

Preuve 33 : Une matrice triangulaire de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ayant une valeur nulle sur la diagonale n'est pas de rang n. Une matrice triangulaire dont les coefficients diagonaux sont tous non nuls est en évidence de rang n.

PROPOSITION 34 : **Inverse d'une matrice triangulaire**
L'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est une matrice triangulaire supérieure.
Idem dans le cas des matrices triangulaires inférieures inversibles.

Preuve 34 : En résolvant le système $Y = TX$, on constate que pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, x_i est une combinaison linéaire de y_j pour $j \in [\![i, n]\!]$

THÉORÈME 35 : **Inversibilité d'une matrice 2x2**

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$. On note $\det A = ad - cb$.

On a alors : $\boxed{A \text{ est inversible } \iff \det A \neq 0}$ et dans ce cas : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$

Preuve 35 : On peut résoudre le système $AX = Y$ ou montrer directement que la formule convient.

PROPOSITION 36 : **Invariance du rang par produit avec une matrice inversible**

Si $M \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ et $\begin{cases} P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) \\ Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K}) \end{cases}$ alors : $\begin{cases} \mathrm{rg}(PM) = \mathrm{rg}\, M \\ \mathrm{rg}(MQ) = \mathrm{rg}\, M \end{cases}$

Preuve 36 : On utilise les endomorphismes canoniquement associés et le fait que la composition avec un isomorphisme ne change pas le rang d'une application linéaire.

`Exemple 15.` $(*)$ Soient $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ et $B \in \mathfrak{M}_{p,n}(\mathbb{K})$ avec $n \neq p$.
Prouver que AB et BA ne peuvent être toutes les deux inversibles.

7 Changement de bases

Nous avons vu que :

- les coordonnées d'un vecteur dépendaient de la base choisie,
- la matrice d'une application linéaire dépendaient des bases de départ et d'arrivée choisie

Dans cette partie, nous allons rechercher des formules permettant de déterminer rapidement les nouvelles coordonnées d'un vecteur ou la nouvelle matrice d'une application linéaire lors d'un changement de bases.

7.1 Matrices de passage

DÉFINITION 20 : **Matrice de passage**
Soit un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n et deux bases $\begin{cases} e = (e_1, \ \ldots, \ e_n) \\ f = (f_1, \ \ldots, \ f_n) \end{cases}$ de E.
On appelle *matrice de passage* de la base e vers la base f, la matrice

$$\boxed{P_e^f = \mathrm{Mat}_e(f_1, \ \ldots, \ f_n)}$$

Remarque 37. Bien retenir cette définition ! ! ! !

`Exemple 16.` $(*)$

1. Dans le plan vectoriel euclidien, déterminer la matrice de passage de la base $(\overrightarrow{i}, \ \overrightarrow{j})$ vers la base polaire $(\overrightarrow{u}_\theta, \ \overrightarrow{v}_\theta)$. Et la matrice de passage inverse ?

2. Dans $\mathbb{R}_3[X]$, déterminer la matrice de passage de $B_1 = (1,\ X,\ X^2,\ X^3)$ vers $B_2 = (1,\ 2X,\ 3+X+2X^2,\ X^3)$. Et la matrice de passage de B_2 vers B_1 ?

Théorème 37 : **Interprétation d'une matrice de passage**
Si e et f sont deux bases du $\mathbb{K}$-ev E de dimension n, alors : $P_e^f = \text{Mat}_{f,e}(\text{id})$

Preuve 37 : $\text{Mat}_{f,e}(\text{id})$ est la matrice de $(\text{id}(f_1),\ \dots,\ \text{id}(f_n))$ dans la base e. C'est à dire $\text{Mat}_e(f_1,\ \dots,\ f_n)$.

Théorème 38 : **Inverse d'une matrice de passage**
Si $e,\ f,\ g$ sont trois bases du $\mathbb{K}$-ev E de dimension n, alors : $\left\{\begin{array}{l} 1)\ P_e^f P_f^g = P_e^g \\ 2)\ P_e^f \text{ est inversible et } {P_e^f}^{-1} = P_f^e \end{array}\right.$.

Preuve 38 :

1. Soient $P_f^g = \text{Mat}_{gf}\,\text{id}_1$, $P_e^f = \text{Mat}_{fe}\,\text{id}_2$ et $P_e^g = \text{Mat}_{ge}\,\text{id}_3$.
   L'égalité $\text{id}_3 = \text{id}_2 \circ \text{id}_1$ donne matriciellement : $P_e^g = P_e^f \times P_f^g$. CQFD !
2. C'est une conséquence de l'égalité précédente.

`Exemple 17.` Vérifier cette propriété en utilisant les résultats des exemples précédents.

Théorème 39 : **Une matrice inversible s'interprète comme matrice de passage**
Soit une matrice inversible $P \in \mathcal{GL}_n(\mathbb{K})$ et une base e du $\mathbb{K}$-ev E de dimension n.
Alors il existe une base f de E telle que

$$P = P_e^f$$

Preuve 39 : Soit $u \in L(E)$ tel que $u(e_j)$ admette pour coordonnées le j^{eme} vecteur de P dans la base e.
On a alors $P = \text{Mat}_e(u(e_1),\ \dots,\ u(e_n))$.
Soit $f = (u(e_1),\ \dots,\ u(e_n))$. Comme u est inversible, alors f est une base de E et on a $P = P_e^f$.

7.2 Changements de bases

Théorème 40 : **Pour un vecteur**
Soit un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n et un vecteur $x \in E$. Soient deux bases e et e' de l'espace E.
En notant $X_e = \text{Mat}_e(x)$ et $X_{e'} = \text{Mat}_{e'}(x)$ on a alors la relation :

$$X_{e'} = P_{e'}^e X_e$$

Preuve 40 : Il suffit de considérer l'application $\underset{e}{E} \xrightarrow{\text{id}_E} \underset{e'}{E}$.

Exercice : 24

$(*)$ Dans $\mathbb{R}^2$, on considère les bases $e = (\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j})$ et $e' = (\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$ où $\overrightarrow{u} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{i} + \dfrac{1}{2}\overrightarrow{j}$ et $\overrightarrow{v} = \dfrac{-1}{2}\overrightarrow{i} + \dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{j}$.
Soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^2$ dont les coordonnées dans e vérifient l'équation $13x^2 + 7y^2 + 6\sqrt{3}xy = 16$.
Déterminer une équation de $\mathcal{E}$ dans la base e'.

Théorème 41 : **Pour une application linéaire**
Soient E et F, deux $\mathbb{K}$-ev de dimension finie. Soit une application linéaire $E \xrightarrow{u} F$.
Soient deux bases $e,\ e'$ de E et deux bases $f,\ f'$ de F.
On a alors la relation :

$$\boxed{\text{Mat}_{e',f'}(u) = P_{f'}^f\,\text{Mat}_{e,f}(u) P_e^{e'}}$$

On pourra retenir cette formule en remarquant que $e',\ f',\ e,\ f$ forme la lettre γ écrite en partant de la droite.

Preuve 41 : Il suffit de remarquer que :

$$\begin{array}{ccc} \underset{e}{E} & \xrightarrow{u} & \underset{f}{F} \\ \mathrm{id}_E \uparrow & & \downarrow \mathrm{id}_F \\ \underset{e'}{E} & \xrightarrow{u} & \underset{f'}{F} \end{array}$$

`Exemple 18.` Choisissez deux bases non canoniques de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.
Déterminez la matrice de l'endomorphisme canoniquement associé à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$ dans ces bases.

Théorème 42 : **Pour un endomorphisme**
Soit un $\mathbb{K}$-ev E de dimension n de bases e et e' et $u \in \mathcal{L}(E)$.
Alors, la relation liant les matrices de u dans les deux bases e et e' s'écrit :

$$\mathrm{Mat}_{e'}(u) = P_{e'}^{e}\,\mathrm{Mat}_e(u) P_e^{e'}$$

Preuve 42 : Il suffit d'appliquer la formule de changement de bases pour les applications linéaires.

`Exemple 19.` $(*)$ Soit l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}^2$, muni de sa base canonique e et les deux vecteurs $f_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $f_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que le système $f = (f_1,\ f_2)$ est une base de E. Ecrire les matrices de passage P_e^f et P_f^e.
2. Soit l'endomorphisme u dont l'expression analytique dans e est $u : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ (x,\ y) & \mapsto & (2x+y,\ x-y) \end{array}$.
   Ecrire les matrices de cet endomorphisme dans la base e, puis la base f et enfin les bases e et f.

Matrice de la projection p sur E_1 parallèlement à E_2 dans une base e :

1. On considère e' une base adaptée à E_1 et E_2.
2. La matrice de p dans e' est alors que la forme $P' = \mathrm{Diag}(1,\ \ldots,\ 1,\ 0,\ \ldots,\ 0)$.
3. Par la formule de changement de bases, on détermine alors la matrice de p dans la base e.

Même principe pour une symétrie...

`Exemple 20.` Déterminer l'expression analytique dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$ de la projection $\begin{cases} \text{sur } F = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \\ \text{paral}^t \text{ à } G = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \end{cases}$.

7.3 Matrices équivalentes

Définition 21 : **Matrices Equivalentes**
On dit que les matrices A et A' de $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont *équivalentes* lorsqu'il existe $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $Q \in \mathrm{GL}_p(\mathbb{K})$ deux matrices inversibles, telles que :

$$A' = PAQ$$

Remarque 38. La relation "est équivalente à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$.

Proposition 43 : **Caractérisation**
Deux matrices sont équivalentes si et seulement si ce sont les matrices d'une même application linéaire exprimées dans des bases différentes.

Preuve 43 : On considère l'endomorphisme canoniquement associé à A et on utilise le fait qu'une matrice inversible s'interprète comme une matrice de passage.

Définition 22 : **Matrice $J_r(n,p)$**
Soient deux entiers n, p et un entier $r \leq \min(n,\ p)$. On définit la matrice de $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$

$$J_r(n,\ p) = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & 0 & \dots & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & \mathbf{1} & \vdots & & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & 0 & & & & \vdots \\ \vdots & & & & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad r \text{ fois le chiffre 1 sur la diagonale}$$

On a $\text{rg}\big(J_r(n,\ p)\big) = r$.

Théorème Fondamental 44 : **Application linéaire de rang r**

Soit $u \in \mathcal{L}(E,\ F)$ avec $\begin{cases} E \text{ un } \mathbb{K}\text{-ev de dimension } p \\ F \text{ un } \mathbb{K}\text{-ev de dimension } n \end{cases}$. Soit $r \in [\![0, \min(n,\ p)]\!]$.

Si $\text{rg}(u) = r$ alors il existe une base e de E et une base f de F telles que :

$$\text{Mat}_{ef}\, u = J_r(n,\ p)$$

Preuve 44 : On construit e en considérant une base adaptée à $\ker u$.
On construit alors f en complétant l'ensemble des vecteurs non nuls de $u(e)$.

Corollaire 45 : **Caractérisation du rang**
Soit une matrice $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$. Soit $r \in [\![0, \min(n,\ p)]\!]$. Alors

$$\text{rg}(A) = r \quad \Longleftrightarrow \quad A \quad \text{et} \quad J_r(n,\ p) \quad \text{sont équivalentes}$$

Preuve 45 :

- $\Leftarrow$ La multiplication par une matrice inversible ne modifie pas le rang d'une matrice.
- $\Rightarrow$ Soit $u \in L(\mathbb{K}^p,\ \mathbb{K}^n)$ canoniquement associée à A. On a alors $\text{rg}\, u = r$.
  On applique alors le théorème précédent.

Corollaire 46 : Deux matrices de $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ sont équivalentes si et seulement si elles sont de même rang.

Preuve 46 : Immédiat.

`Exemple 21.` $(*)$ Trouver deux matrices inversibles P et Q telles que : $\begin{pmatrix} 1 & -4 & -3 & -2 & 2 \\ 2 & -6 & -6 & -4 & 4 \\ -3 & 12 & 12 & 6 & -9 \\ 0 & 2 & 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} = PJ_3(4,5)Q$.

Exercice : 25
$(**)$ Soit $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r.
Montrer qu'il existe deux matrices inversibles A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ telles que $M = A + B$

Corollaire 47 : **Une matrice et sa transposée ont même rang**
$(**)$ Soit une matrice rectangulaire $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$, alors :

$$\text{rg}({}^tA) = \text{rg}(A)$$

Preuve 47 : On utilise le théorème précédent.

Remarque 39. On en déduit que le rang d'une matrice est égal : $\begin{cases} \text{au rang de ses vecteurs colonnes} \\ \text{au rang de ses vecteurs lignes} \end{cases}$.

Corollaire 48 : **Caractérisation du rang d'une matrice**
Le rang d'une matrice $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ est égal au plus grand des rangs des matrices carrées inversibles extraites de cette matrice.

Preuve 48 : Il faut procéder en deux temps. Soit $r \in \mathbb{N}$ le rang de A.

1. On commence par montrer (par l'absurde) que le rang d'une matrice carrée inversible extraite est nécessairement inférieur à r.
2. Puis, on construit une matrice extraite inversible de taille $r \times r$ en considérant r colonnes de A linéairement indépendantes. Cette matrice étant de rang r, elle admet r lignes linéairement indépendantes que l'on sélectionne. On obtient la matrice cherchée.

7.4 Matrices semblables

Définition 23 : **Matrices semblables**
On dit que deux matrices A et A' de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ sont *semblables* lorsqu'il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que :

$$A' = P^{-1}AP$$

Remarque 40. La relation "est semblable à" est une relation d'équivalence sur l'ensemble $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

Proposition 49 : **Caractérisation**
Deux matrices A et A' sont semblables si et seulement si ce sont les matrices d'un même endomorphisme exprimées dans des bases différentes.

Preuve 49 : On utilise l'interprétation d'une matrice inversible en terme de matrice de passage.

Exercice : 26

($*$) Montrer que $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de rang r est semblable à une matrice de la forme $\begin{pmatrix} A & 0 \end{pmatrix}$ où $A \in \mathfrak{M}_{n,r}(\mathbb{K})$.

Exercice : 27

($**$) Montrer que les matrices $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont semblables.

Méthode : Calcul de A^n

1. On montre que A est semblable à B d'expression plus simple (si possible diagonale) : $A = P^{-1}BP$
2. On vérifie alors assez facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a :

$$A^n = P^{-1}B^nP$$

3. Si le calcul de B^n est faisable, alors on en déduit l'expression de A^n.

Remarque 41. Le calcul de la puissance nème d'une matrice permet en particulier :

1. De déterminer l'expression des termes généraux de suites linéaires d'ordre 1 imbriquées
2. D'étudier le déplacement aléatoire d'un sujet dans un réseau fini
3. De calculer l'exponentielle d'une matrice (HP)
4. De résoudre des systèmes linéaires d'équations différentielles d'ordre 1 (HP)

Exercice : 28

($**$) Soit la matrice $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que A est semblable à la matrice $T = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
2. En déduire l'expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

3. En déduire l'étude des suites (u_n), (v_n) et (w_n) telles que $\begin{cases} u_0 = 1 \\ v_0 = 1 \\ w_0 = 1 \end{cases}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$: $\begin{cases} u_{n+1} = 3u_n - v_n + w_n \\ v_{n+1} = u_n + 2v_n \\ w_{n+1} = v_n + w_n \end{cases}$.

Exercice : 29

$(**)$ Dans la base canonique de $\mathbb{R}^2$, déterminer les matrices des l'endomorphismes $u \in L(\mathbb{R}^2)$ tels que : $\begin{cases} \ker(u) = \mathrm{Vect}(1,\ 2) \\ \mathrm{Im}\, u = \mathrm{Vect}(1,\ 1) \end{cases}$.

Proposition 50 : **Trace de deux matrices semblables**
Deux matrices semblables de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ ont la même trace.

Preuve 50 : Immédiat en utilisant la propriété $\mathrm{Tr}(AB) = \mathrm{Tr}(BA)$.

Remarque 42. Trouver un contre-exemple justifiant que la réciproque est fausse.

Définition 24 : **Trace d'un endomorphisme**
Soit $u \in L(E)$ où E est un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie.
Remarquons que la trace de la matrice de u est indépendante de la base choisie.
Cette valeur commune est alors appelée la *trace* de u et notée $\mathrm{Tr}(u)$.

Proposition 51 : **Trace d'un projecteur**
La trace d'un projecteur est égale à son rang qui lui-même est égal à la dimension du support.

Preuve 51 : Pas de difficulté en se plaçant dans une base adaptée.

Exercice : 30

$(**\ CCP)$ Soit $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ la matrice d'un projecteur de $\mathbb{R}^n$.

Déterminer la trace de l'application $\psi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ X & \mapsto & PX + XP \end{array}$.

Proposition 52 : **Propriétés de la trace d'un endomorphisme**
Soient $u,\ v \in \mathcal{L}(E)$ où E est de dimension finie.
On a alors :

1. $\mathrm{Tr}(\lambda u + \mu v) = \lambda\,\mathrm{Tr}(u) + \mu\,\mathrm{Tr}(v)$ pour tout $\lambda,\ \mu \in \mathbb{K}$.
2. $\mathrm{Tr}(u \circ v) = \mathrm{Tr}(v \circ u)$

Preuve 52 : Immédiat en utilisant les propriétés de la trace d'une matrice.

8 Les opérations élémentaires

8.1 Matrices associées aux OEL et aux OEC

Lemme 53 : **Produits de matrices de la base canonique**

Soient $\begin{cases} E_{ab} \text{ une matrice de la base canonique de } \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K}) \\ E_{cd} \text{ une matrice de la base canonique de } \mathfrak{M}_{p,q}(\mathbb{K}) \end{cases}$. On a alors :

$$E_{ab} \times E_{cd} = \delta_{bc} E_{ad}$$

Preuve 53 : Simple calcul ...

Lemme 54 : **Effet du produit par une matrice de la base canonique**
Soit $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$. On notera $L_1, \ldots, L_n$ ses lignes et $C_1, \ldots, C_p$ ses colonnes.
Soient $\{E_{ij}\}_{(i,\ j) \in [\![1,q]\!]^2}$ la base canonique de $\mathfrak{M}_q(\mathbb{K})$ ($q = n$ ou $q = p$ selon les cas).
On a alors :

1. Effectuer $E_{ij} \times A$ revient à placer L_j à la place de L_i et annuler toutes les autres lignes.
2. Effectuer $A \times E_{ij}$ revient à placer C_i à la place de C_j et annuler toutes les autres colonnes.

Preuve 54 : Simples calculs ...

DÉFINITION 25 : Soit $A \in \mathfrak{M}_{pq}(\mathbb{K})$.
On appelle *opération élémentaire sur les lignes* (OEL), une des 3 opérations suivantes :

1. L'échange de deux lignes ($L_i \leftrightarrow L_j$)
2. La multiplication d'une ligne par un scalaire non nul ($\lambda L_i \to L_i$)
3. L'ajout d'une autre ligne fois un scalaire à une ligne donnée ($L_i + \lambda L_j \to L_i$)

Remarque 43. On définit de la même façon les *opérations élémentaires sur les colonnes* (OEC).

DÉFINITION 26 : **Matrices associées**
Pour $(i,\ j) \in [\![1, n]\!]^2$ avec $i \neq j$ et $\lambda \neq 0$, soient les matrices suivantes de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.

1. $D_i^n(\lambda) = I_n + (\lambda - 1)E_{ii}$
2. $T_{ij}^n(\lambda) = I_n + \lambda E_{ij}$
3. $P_{ij}^n = I_n - E_{ii} - E_{jj} + E_{ij} + E_{ji}$

Ces 3 matrices sont inversibles car :

1. $D_i^n(\lambda).D_i^n(\frac{1}{\lambda}) = I_n$
2. $T_{ij}^n(\lambda).T_{ij}^n(-\lambda) = I_n$
3. $[P_{ij}^n]^2 = I_n$

THÉORÈME 55 : **Effet de la multiplication par une matrice associée**
Soit $A \in \mathfrak{M}_{pq}(\mathbb{K})$.

1.	Effectuer	$D_i^p(\lambda) \times A$	revient	à effectuer l'opération	$\lambda L_i \to L_i$
2.	Effectuer	$T_{ij}^p(\lambda) \times A$	revient	à effectuer l'opération	$L_i + \lambda L_j \to L_i$
2.	Effectuer	$P_{ij}^p(\lambda) \times A$	revient	à effectuer l'opération	$L_i \leftrightarrow L_j$

Preuve 55 : Il suffit de décomposer le calcul.

Remarque 44. Multiplier à droite par $D_i^q(\lambda)$, $T_{ij}^q(\lambda)$ et $P_{ij}^q(\lambda)$ revient à effectuer les mêmes opérations sur les colonnes.

8.2 Premières conséquences

PROPOSITION 56 : **Conservation du noyau par OEL**
Soit $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Les OEL de A conservent le noyau de A.

Preuve 56 : En effet, $AX = 0 \Longleftrightarrow BAX = 0$ pour toute matrice $B \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.

PROPOSITION 57 : **Conservation de l'image par OEC**
Soit $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$.
Les OEC de A conservent l'image de A.

Preuve 57 : En effet, $\{AX \mid X \in \mathfrak{M}_{p1}(\mathbb{K})\} = \{ABX \mid X \in \mathfrak{M}_{p1}(\mathbb{K})\}$ lorsque B est une matrice inversible.

THÉORÈME FONDAMENTAL 58 :
Les opérations élémentaires sur les lignes ou sur les colonnes ne modifient pas le rang d'une matrice.

Preuve 58 : La multiplication par une matrice inversible ne modifie par le rang d'une matrice.

8.3 Applications pratiques

8.3.1 Recherche du rang d'une matrice

L'algorithme du rang consiste à transformer une matrice en effectuant des opérations élémentaires sur ses lignes et ses colonnes. Nous avons vu en effet, que ce type d'opérations ne modifie pas le rang d'une matrice. Le principe consiste donc à effectuer des opérations judicieuses afin d'obtenir une matrice dont le rang se détermine facilement.

Exercice : 31
(∗∗) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le rang de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ de terme général $a_{ij} = (i+j-1)^2$.

Lemme 59 : **lemme de l'algorithme du rang**
Soit $\lambda \neq 0$ et $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$. On a alors :

$$\operatorname{rg}\begin{pmatrix} \lambda & X & \dots & X \\ 0 & & & \\ \vdots & & A & \\ 0 & & & \end{pmatrix} = 1 + \operatorname{rg} A$$

Preuve 59 : On s'intéresse à la dimension de $\operatorname{Vect}(L_1,\ L_2,\ \dots,\ L_{p+1})$.

Algorithme du rang :

1. Par OEL et OEC on transforme la matrice étudiée sous la forme précédente.
2. On recommence le processus avec la matrice A jusqu'à obtenir une matrice nulle ou dont le rang est évident

`Exemple 22.` (∗) Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 5 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 4 \\ -1 & 6 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice : 32
(∗) Soit $a,\ b \in \mathbb{R}$.

Déterminer le rang de la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$

Exercice : 33
(∗∗) **Autres méthodes de détermination du rang**
Déterminer les rangs des deux matrices suivantes :

1. $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = i + j - 1$ *(en effectuant des OEC judicieuses)*
2. $B = (b_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $b_{ij} = \sin(i + j)$ *(en décomposant les colonnes C_j)*

Bilan des méthodes de détermination du rang d'une matrice :

Pour déterminer le rang d'une matrice de $A \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ on peut :

1. **Méthode 1 :** Eliminer les vecteurs colonnes redondants et on compte ceux qui restent.
2. **Méthode 2 :** Appliquer la formule du rang après avoir déterminé le noyau.
3. **Méthode 3 :** Appliquer l'algorithme du rang.
4. **Méthode 4 :** Effectuer des OEL et OEC afin d'obtenir une matrice plus simple.
5. **Méthode 5 :** Montrer que les colonnes sont toutes combinaison linéaire des mêmes vecteurs.

Exercice : 34
(∗) Soit $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $M = \begin{pmatrix} A & A \\ A & B \end{pmatrix}$. Prouver que $\operatorname{rg}(M) = \operatorname{rg}(A) + \operatorname{rg}(A - B)$.

Remarque 45. Même s'il peut être intéressant d'appliquer l'algorithme du rang dans les exercices, cet algorithme est surtout intéressant en programmation. En effet, un ordinateur ne peut mettre en oeuvre qu'une méthode systématique et ne peut pas utiliser des "ruses" comme celles vues dans l'exercice précédent.

8.3.2 Inversion d'une matrice

Soit $A \in GL_n(\mathbb{K})$.

LEMME 60 : On peut transformer A en la matrice I_n, en n'utilisant que les OEL.

Preuve 60 :

1. On peut transformer A en une matrice triangulaire supérieure (algorithme de gauss) ne comportant que des 1 sur la diagonale.
2. Puis, en partant de la dernière colonne, on annule tous les coefficients hors de la diagonale.
3. On obtient alors I_n.

COROLLAIRE 61 : Pour déterminer A^{-1}, il suffit d'effectuer sur I_n les mêmes OEL que sur A.

Preuve 61 : Pour déterminer A^{-1}, il suffit d'inverser le système $AX = Y$, c'est à dire $AX = I_n.Y$.
Ainsi, en multipliant à gauche par les matrices des OE, on finit par obtenir $I_n.X = A^{-1}Y$.
I_n a donc été transformée en A^{-1}.

Méthode d'obtention de A^{-1}

1. On considère la matrice $B = \begin{pmatrix} A & | & I_n \end{pmatrix}$.
2. Par application des OEL :
   (a) On transforme B de façon à obtenir une matrice triangulaire à la place de A.
   (b) On transforme B de façon à obtenir une matrice diagonale à la place de A.
   (c) On transforme B de façon à obtenir I_n à la place de A.
3. On obtient alors la matrice $B = \begin{pmatrix} I_n & | & A^{-1} \end{pmatrix}$.

`Exemple 23.` $(*)$ En utilisant la méthode précédente, déterminer l'inverse des matrices :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

9 Exercices de TD

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs ♡ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs ♡ correspond à la difficulté des exercices.

I] Calculs sur les matrices

Il suffit ici de connaître les propriétés du calcul matriciel.
En particulier, on retiendra :

1. Les deux techniques pour déterminer le produit de deux matrices :
   - En posant directement le calcul
   - A l'aide de la formule donnant le terme général : $(AB)_{ij} = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} A_{ik}B_{kj}$.
2. Que le produit de deux matrice n'est pas commutatif
3. Que $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ est un $\mathbb{K}$-ev de dimension $n \times p$ dont la base canonique est (E_{ij})
4. Le résultat du produit de deux matrices de la base canonique : $E_{ij}E_{rs} = \delta_{jr}E_{is}$

Exercice de TD : 1

(♡♡) Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer l'existence de deux suites réelles (a_n) et (b_n) telles que : $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ A^n = a_nA + b_nA^2$.
2. Déterminer l'expressions de a_n et b_n en fonction de n.
3. La suite (A^n) converge-t-elle ?

Exercice de TD : 2

(♡♡) Soit $n > 1$ et $J \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par $J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & 1 & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ et $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ définie par $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour $k \in \mathbb{N}^*$, calculer J^k.
2. J est-elle inversible ?
3. Calculer les puissances successives de A.

Exercice de TD : 3

($**$) **Matrices de Jordan**.
Soit la matrice $J = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $a_{ij} = \delta_{i,j+1}$.

1. Calculer la matrice J^2. Conjecturez alors la valeur de J^k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Prouver votre conjecture par récurrence :
   (a) En décomposant J^k avec les matrices de la base canonique
   (b) En effectuant un calcul par blocs
   (c) En introduisant u canoniquement associé à J

Remarque : Camille Jordan (1838-1922) était français. Ses travaux ont portés sur la géométrie (courbes de Jordan), mais également sur l'étude du groupe des permutations, et les séries de Fourier

Exercice de TD : 4

(♡♡) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que : $\forall X \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}),\ (XA)^2 = 0$.
Montrer que $A = 0$.

Exercice de TD : 5

($**$) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que : A est antisymétrique $\Longleftrightarrow \forall X \in \mathfrak{M}_{n,\ 1}(\mathbb{R}),\ {}^tXAX = 0$.

Exercice de TD : 6

($\heartsuit\heartsuit$) Soit $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Déterminer un polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(A) = 0$.
En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice de TD : 7

($**$) Soit $A \in \mathfrak{M}_{10}(\mathbb{K})$ telle que $A^{2017} = 0$.
On souhaite prouver par l'absurde que $A^{10} = 0$.

1. Montrer que l'ensemble $\{k \in \mathbb{N}^* \mid A^k = 0\}$ admet un plus petit élément $p \geq 11$.
2. Prouver qu'il existe $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ tel que $A^{p-1}X_0 \neq 0$.
3. Montrer alors que la famille $(X_0,\ AX_0,\ \dots, A^{p-1}X_0)$ est une famille libre.
4. Conclure.

II] Matrice d'une application linéaire

Il suffit de connaître la définition : $\quad \mathrm{Mat}_{e,f}\, u = \mathrm{Mat}_f(u(e_1),\ \dots,\ u(e_p))$.

Exercice de TD : 8

($\heartsuit\heartsuit$) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3 et $u \in \mathcal{L}(E)$ non nul tel que $u^2 = 0$.

1. Montrer que $\mathrm{rg}(u) = 1$.
2. En déduire qu'il existe une base de E dans laquelle u admet pour matrice $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.
3. En déduire les endomorphismes qui commutent avec u.

Exercice de TD : 9

($*$) Dans $E = \mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$, on considère les trois fonctions suivantes : $\left\{ \begin{array}{l} f_1 : f_1(x) = 1 \\ f_2 : f_2(x) = x \\ f_3 : f_3(x) = x \ln|x| \text{ si } x \neq 0,\ f_3(0) = 0 \end{array} \right.$.

On note alors $F = \mathrm{Vect}(f_1,\ f_2,\ f_3)$.

1. Montrer que $(f_1,\ f_2,\ f_3)$ est une base de F.
2. Montrer que si $f \in F$ alors $u : x \mapsto xf(x)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et déterminer $u'(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.
3. On note ϕ l'application qui a tout $f \in F$ associe $\phi(f)$ la fonction dérivée de $x \mapsto xf(x)$.
   (a) Montrer que ϕ est un endomorphisme de F.
   (b) Déterminer la matrice A de ϕ dans la base $(f_1,\ f_2,\ f_3)$.
   (c) Justifier que A est inversible et déterminer A^{-1}.
   En déduire une primitive de f_3 sur $\mathbb{R}$.

Exercice de TD : 10

($\heartsuit\heartsuit$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

On définit la matrice $A = (a_{ij})$ avec $(i,j) \in [\![1, n+1]\!]$ par $\left\{ \begin{array}{lll} \binom{j-1}{i-1} & \text{si} & i \leq j \\ 0 & \text{si} & i > j \end{array} \right.$.

Préciser l'endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$ dont la matrice est A dans la base $(1,\ X,\ \dots,\ X^n)$.

Exercice de TD : 11

($*$) Soit $F \in L(\mathbb{R}_n[X], \mathbb{R})$ définie par : $\quad F(P) = \displaystyle\int_0^1 P(t)\ \mathrm{d}t$.

Déterminer la matrice associée à F dans les bases $e = (1,\ X,\ \dots,\ X^n)$ et $e' = (1)$.

Exercice de TD : 12

($\heartsuit$) Soit $e = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ une base d'un $\mathbb{K}$-ev E de dimension 3 et $e' = (e_3,\ e_2,\ e_1)$ une autre base de E.

Soit $f \in L(E)$ définie par : $Mat_e f = \begin{pmatrix} a & a' & a'' \\ b & b' & b'' \\ c & c' & c'' \end{pmatrix}$.

Déterminer $Mat_{e'} f$.

Exercice de TD : 13

($\heartsuit\heartsuit - \heartsuit\heartsuit\heartsuit$) Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit f un endomorphisme de E tel que $f^{n-1} \neq 0$ et $f^n = 0$ (au sens de la composition des applications).

1. Justifier qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $\mathcal{B} = (x_0,\ f(x_0), \dots,\ f^{n-1}(x_0))$ forme une base de E.
2. Déterminer les matrices de f, f^2, ..., f^{n-1} dans cette base $\mathcal{B}$.
3. En déduire que $\{g \in \mathcal{L}(E) \mid fog = gof\} = \text{Vect}(\text{id}_E,\ f,\ \dots,\ f^{n-1})$.
   Aide : On pourra exprimer $g(x_0)$ dans la base $\mathcal{B}$, puis en déduire la forme de la matrice de g dans $\mathcal{B}$.

Exercice de TD : 14

($\heartsuit$) Déterminer la nature des l'endomorphismes u canoniquement associés aux deux matrices suivantes :

$$A = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \frac{2}{3}\begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

Préciser éventuellement les ses sous-espaces caractéristiques.

III] Sous-espaces vectoriels et structures algébriques

Pas de connaissance spécifique aux matrices, mais il faut maitriser les connaissances générales sur les sev et sur les structures algébriques.

Exercice de TD : 15

($\heartsuit$) Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$. On note C l'ensemble des matrices qui commutent avec A.

Montrer que C est une sous-algèbre de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ dont on déterminera une base et la dimension.

Exercice de TD : 16

($*$) Montrer que l'ensemble $E = \{M(x,\ y) = \begin{pmatrix} x+y & 4y \\ -y & x-y \end{pmatrix} \mid x,\ y \in \mathbb{R}\}$ est $\begin{cases} \text{un } \mathbb{R}\text{-espace vectoriel} \\ \text{un corps} \end{cases}$.

Exercice de TD : 17

($\heartsuit$) Montrer que l'ensemble $E = \{M(x,\ y) = \begin{pmatrix} x & y \\ -\bar{y} & \bar{x} \end{pmatrix} \mid x,\ y \in \mathbb{C}\}$ est $\begin{cases} \text{un } \mathbb{R} \text{ espace vectoriel} \\ \text{un corps non commutatif} \end{cases}$.

Exercice de TD : 18

($\heartsuit\heartsuit$) Soit n un entier pair.
Une matrice $M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ est dite *en damier* si et seulement si il existe a et b dans $\mathbb{K}$ tels que :

$$m_{ij} = \begin{cases} a & si \quad i+j \text{ est pair} \\ b & si \quad i+j \text{ est impair} \end{cases}$$

On note D l'ensemble des matrices en damier.

1. Montrer que D est un sev de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ de dimension 2 et prouver que D est stable par la multiplication.
2. Si $M \in D$, montrer qu'il existe $\lambda,\ \mu \in \mathbb{K}$ tels que $M^3 = \lambda M^2 + \mu M$.

Exercice de TD : 19

($**$) Soit $(A_i)_{0 \leq i \leq n^2})$ une base de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $X_0 \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$ non nulle.
Montrer que $(A_i X_0)_{0 \leq i \leq n^2})$ est une famille génératrice de $\mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{K})$

IV] Rang et trace d'une matrice

1. Le rang d'une matrice est la dimension de l'espace engendré par les vecteurs colonnes
2. Bien connaître la caractérisation du rang d'une matrice à l'aide des matrices équivalentes.
3. Savoir calculer le rang d'une matrice :
   (a) Soit directement en recherchant une base de l'espace engendré par les vecteurs colonnes de la matrice
   (b) Soit avec la formule du rang
   (c) Soit avec l'algorithme du rang
4. La trace d'une matrice est la forme linéaire définie par $\mathrm{Tr}\, A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_{kk}$.
   Se souvenir également que $\mathrm{Tr}\, AB = \mathrm{Tr}\, BA$

Exercice de TD : 20

(♡♡) Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \\ M & \mapsto & AM \end{array}$.
Déterminer la trace de φ en fonction de la trace de A.

Exercice de TD : 21

(∗∗) **Endomorphisme de trace nulle.**
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ où $\dim E = 2$ et $u \notin \mathrm{Vect}(\mathrm{id}_E)$ tel que $\mathrm{Tr}(u) = 0$.

1. Montrer qu'il existe $x_0 \in E$ tel que $(x_0,\ u(x_0))$ est une base de E.
   Cette question a été traitée dans un chapitre antérieur...
2. En déduire qu'il existe une base e' de E dans laquelle u admet une matrice dont les termes diagonaux sont nuls.

Exercice de TD : 22

(♡♡♡) Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r.
Montrer qu'il existe des matrices B et C respectivement dans $\mathfrak{M}_{n,r}(\mathbb{K})$ et $\mathfrak{M}_{r,p}(\mathbb{K})$ telles que $A = BC$.

Exercice de TD : 23

(♡♡) Soit $A \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{K})$ de rang r.
Montrer qu'il existe r matrices $A_1, \ldots, A_r$ de $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ de rang 1 telles que : $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{r} A_k$.

Exercice de TD : 24

(∗) Soit $a, b \in \mathbb{R}$. Déterminer le rang des matrices suivantes :

1. $B = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 & b \\ b & a & 0 & 0 \\ 0 & b & a & 0 \\ 0 & 0 & b & a \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ b+c & c+a & a+b \\ bc & ca & ab \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 1 & a & a & a \\ a & 1 & a & a \\ a & a & 1 & a \\ a & a & a & 1 \end{pmatrix}$

V] Le groupe linéaire

Le groupe linéaire est l'ensemble des matrices inversibles.
Bien connaître les différentes caractérisations de l'inversibilité d'une matrice (à l'aide du rang, du noyau, du déterminant, de l'inversibilité à droite ou à gauche)

Exercice de TD : 25

(∗∗) Soit $(a_1,\ \ldots,\ a_n) \in \mathbb{K}^n$ distincts deux à deux et $A = \begin{pmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & \ldots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$.

Montrer en vérifiant que $\mathrm{rg}(A) = n$ que A est inversible.
Aide : vous pourrez envisager d'introduire un polynôme.

Exercice de TD : 26

$(***)$ Le but de cet exercice est de déterminer l'inverse de la matrice suivante : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ \vdots & & \ddots & 1 & 2 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Donner une expression simplifiée de l'expression algébrique de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} kx^{k-1}$
2. Prouver que $A = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} kJ^{k-1}$ où J est une matrice à déterminer.
3. En déduire l'inverse de A.

Exercice de TD : 27

$(\heartsuit\heartsuit)$
1. Montrer que $\forall (i,\ j) \in [\![1, n]\!]^2$, $I_n + E_{ij} \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$.
2. En déduire que $\{A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K}) \mid \forall X \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}),\ AX = XA\} = \mathbb{K}I_n$

Exercice de TD : 28

$(\heartsuit\heartsuit)$ Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$, $M(a,\ b) = \begin{pmatrix} a & b & \dots & b \\ b & a & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ b & \dots & b & a \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $E = \{M(a,\ b) \mid a,\ b \in \mathbb{R}\}$.

1. Montrer que E est un $\mathbb{R}$-ev et déterminer sa dimension.
2. Montrer que E est stable par la multiplication.
3. Déterminer une combinaison linéaire à coefficients non nuls entre les matrices I_n, $M(a,\ b)$ et $M(a,\ b)^2$.
4. En déduire une condition pour que $M(a,\ b)$ soit inversible et déterminer son inverse lorsqu'il existe.

Exercice de TD : 29

$(\heartsuit\heartsuit)$ Soit $n \in \mathbb{N}\backslash\{0,\ 1\}$ et $\omega = e^{\frac{2i\pi}{n}}$. On pose $A = \left(\omega^{(i-1)(j-1)}\right)_{1\leq i,\ j\leq n}$.
1. Calculer $A\overline{A}$.
2. En déduire que A est inversible et calculer A^{-1}.

Exercice de TD : 30

$(**)$ **Matrices de permutation :**

Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $n > 1$. On note $\mathcal{S}_n$ l'ensemble des permutations de $[\![1, n]\!]$.
Pour $\sigma \in \mathcal{S}_n$, on note $P(\sigma) = (\delta_{i,\ \sigma(j)})_{1\leq i,j\leq n} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ appelée matrice de permutation associée à σ.
1. Montrer que $\forall (\sigma,\ \sigma') \in \mathcal{S}_n^2$, on a : $\quad P(\sigma \circ \sigma') = P(\sigma).P(\sigma')$
2. En déduire que $E = \{P(\sigma) \mid \sigma \in \mathcal{S}_n\}$ est un sous-groupe de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ isomorphe à $\mathcal{S}_n$.
3. Vérifier que ${}^tP(\sigma) = P(\sigma^{-1})$.

Exercice de TD : 31

$(\heartsuit\heartsuit)$ Soit E l'ensemble des matrices de la forme $M(a,\ b,\ c) = \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & b \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}$ avec $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$.

Notre objectif est d'établir que l'inverse d'une matrice inversible de E appartient à E, sans calculer cet inverse.
1. Montrer que $(E,\ +,\ .)$ est un $\mathbb{R}$-espace vectoriel dont on précisera la dimension.
2. Montrer que $(E,\ +,\ \times)$ est un anneau commutatif.

3. A quelle condition sur $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R}^3$, la matrice $A = M(a,\ b,\ c)$ est-elle inversible dans $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$?
   On suppose cette condition vérifiée.
4. En considérant l'application $f\ :\ E \mapsto E$ définie par $f(X) = AX$, montrer que $A^{-1} \in E$.
5. Prouver le résultat précédent en calculant directement A^{-1}.

Exercice de TD : 32

$(**)$ Calculer l'inverse et les puissances de la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

On pourra pour cela, déterminer l'endomorphisme φ de $\mathbb{R}_4[X]$ tel que $A = \mathrm{Mat}_e\,\varphi$ où e est la base canonique de $\mathbb{R}_4[X]$

VI] Changement de bases

1. Bien connaître les formules de changements de bases pour :
   (a) Les vecteurs : $X_e = P_e^{e'} X_{e'}$
   (b) Les applications linéaires : $\mathrm{Mat}_{e'f'}\,u = P_{f'}^{f}\,\mathrm{Mat}_{ef}\,uP_e^{e'}$
   (c) Les endomorphismes : $\mathrm{Mat}_{e'}\,u = P_{e'}^{e}\,\mathrm{Mat}_e\,uP_e^{e'}$
2. Connaître également comment montrer que deux matrices sont équivalentes ou semblables en passant par les endomorphismes canoniquement associés.
3. Savoir utiliser les matrices semblables pour :
   (a) Résoudre une système différentiel linéaire imbriqué
   (b) Déterminer la puissance nième d'une matrice et savoir utiliser l'expression de A^n pour :
      i. Exprimer les termes généraux de suites linéaires imbriquées en fonction de n.
      ii. Définir l'exponentielle d'une matrice

Exercice de TD : 33

$(\heartsuit\heartsuit)$ Prouver que les matrices suivantes sont semblables.
Déterminer la matrice inversible P telle que $A = P^{-1}BP$:

1. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ -3 & -3 & 3 \\ -2 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
2. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Exercice de TD : 34

$(\heartsuit\heartsuit)$ Soit $P \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $P = \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & 1 & 0 \\ 0 & 1 & & \vdots \\ 1 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que P est inversible et calculer son inverse.
2. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Calculer la matrice PAP.
3. En déduire qu'une matrice triangulaire supérieure est semblable à un matrice triangulaire inférieure.

Exercice de TD : 35

$(\heartsuit\heartsuit)$ **Application des matrices semblables**. Soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Préliminaires :
   (a) Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.
   (b) Calculer la matrice P^{-1}.
   (c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En Déterminer l'expression de A^n en fonction de n.

2. Application 1 : Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = 2x + 2y + z \\ y' = x + 3y + z \\ z' = x + 2y + 2z \end{cases}$
3. Application 2 : Déterminer l'expression en fonction de n des termes généraux des suites définies par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = 2x_n + 2y_n + z_n \\ y_{n+1} = x_n + 3y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + 2y_n + 2z_n \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0,\ y_0,\ z_0 \quad \text{donnés}$$

   En déduire une CNS de convergence.

4. Application 3 : Calculer $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.
   La limite d'une matrice correspondant à la matrice obtenue en recherchant la limite de chaucun des coefficients.

Exercice de TD : 36

(♡♡) **Application des matrices semblables**. Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Préliminaires :
   (a) Montrer qu'il existe $P \in GL_3(\mathbb{R})$ telles que $P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.
   (b) Montrer qu'on pouvait trouver ce résultat sans connaître à priori la matrice diagonale B.
   (c) Calculer la matrice P^{-1}.
   (d) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer l'expression de A^n en fonction de n.

2. Application 1 : Résoudre le système différentiel $\begin{cases} x' = x \\ y' = x + y + z \\ z' = x + y + z \end{cases}$
3. Application 2 : Déterminer l'expression en fonction de n des termes généraux des suites définies par :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n \\ y_{n+1} = x_n + y_n + z_n \\ z_{n+1} = x_n + y_n + z_n \end{cases} \quad \text{et} \quad x_0,\ y_0,\ z_0 \quad \text{donnés}$$

   En déduire une CNS de convergence.
4. Application 3 : Calculer : $e^A = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{A^k}{k!}$.
   La limite d'une matrice est la matrice obtenue en recherchant la limite de chaucun des coefficients.

Exercice de TD : 37

(♡♡) **Calcul de la puissance niéme d'une matrice**. Soit $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que A est semblable à $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

2. En déduire l'expression de A^n où $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice de TD : 38

(∗∗) **Diagonalisation d'une matrice**

1. Prouver que la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & 2i \\ -2i & 2 \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice diagonale.

2. En déduire l'expression de A^n où $n \in \mathbb{N}^*$.