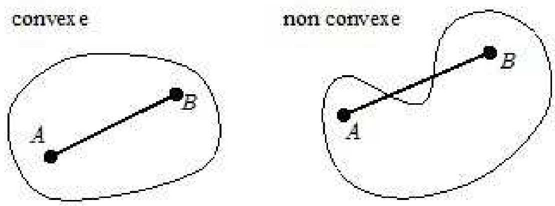
Les sous-espaces affines d'un EV

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

10 mai 2017



Dans ce chapitre, on considère $\boxed{E \text{ un } \mathbb{R} \text{ espace vectoriel}}$.

1 Sous-espaces affines

DÉFINITION 1 : **Sous-espace affine**
On dit qu'une partie $\mathcal{F}$ de E est un *sous-espace affine* (sea) de E si il existe un vecteur A de E et un sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F}$ de E tel que

$$\mathcal{F} = \{A + \overrightarrow{f} \mid \overrightarrow{f} \in \overrightarrow{F}\}$$

On note alors $\boxed{\mathcal{F} = A + \overrightarrow{F}}$ et on dit que :

1. $\overrightarrow{F}$ est la *direction* du sous-espace affine $\mathcal{F}$.
2. $\mathcal{F}$ est le sous-espace affine de E *passant par* A *et de direction* $\overrightarrow{F}$.
3. $\dim \overrightarrow{F}$ est la *dimension* du sous-espace affine $\mathcal{F}$.
4. toute base de $\overrightarrow{F}$ est un *ensemble de vecteurs directeurs* de $\mathcal{F}$.

Remarque 1.

1. Le "vecteur" A sera alors appelé un point, ainsi que tous les autres "vecteurs" de la forme $A + \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{F}$.
2. $\mathcal{F}$ est alors considéré comme un ensemble de points.
3. On notera $\overrightarrow{u} = B - A = \overrightarrow{AB}$ le vecteur $\overrightarrow{u}$ tel que $B = A + \overrightarrow{u}$.

`Exemple 1.`

1. L'ev E peut être considéré comme le sea d'origine $\vec{0}$: $\mathcal{E} = \overrightarrow{0} + E$.
   On notera donc E ou $\mathcal{E}$ selon que E est considéré comme un ensemble de vecteurs ou un ensemble de points.
2. Les sev $\vec{F}$ de E sont des sea $\mathcal{F}$ de $\mathcal{E}$ passant par $\vec{0}$: $\mathcal{F} = \overrightarrow{0} + F$
   On les représentera donc toujours passant par l'origine.

Exercice : 1

($*$) Que pouvez-vous dire de l'image d'un sea par une application linéaire ?

PROPOSITION 1 : Soit $A \in \mathcal{E}$.

L'application : $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & E \\ M & \mapsto & \overrightarrow{AM} \end{array}$ est une bijection.

Preuve 1 : En effet : $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AM} \iff M = A + \overrightarrow{u}$

Points et vecteurs :

Remarque 2. Même si en théorie, il est possible d'additionner des points entre eux (puisqu'il s'agit en fait de vecteurs) ou de les multiplier par des scalaires, on évitera de le faire en raison de difficultés d'interprétation.

DÉFINITION 2 : Soit E un espace vectoriel de dimension n et $\overrightarrow{F}$ un sev de E.
Soit $\mathcal{F}$ un sea de E de direction $\overrightarrow{F}$.

1. Si $\dim \overrightarrow{F} = 0$ alors $\mathcal{F}$ est réduit à un point.
2. Si $\dim \overrightarrow{F} = 1$ alors $\mathcal{F}$ est une droite affine.
3. Si $\dim \overrightarrow{F} = 2$ alors $\mathcal{F}$ est un plan affine.
4. Si $\dim \overrightarrow{F} = n-1$ alors $\mathcal{F}$ est un hyperplan affine.

`Exemple 2.`

1. Les sea de $\mathbb{R}^2$ sont : $\{0\}$, les droites affines et $\mathbb{R}^2$.
   Par exemple : $\mathcal{D} = (1,\ 2) + \text{Vect}((1,\ 1))$ est une droite affine de $\mathbb{R}^2$.
2. Les sea de $\mathbb{R}^3$ sont : $\{0\}$, les droites affines, les plans affines et $\mathbb{R}^3$.
   Par exemple : $\mathcal{P} = (1,\ 2,\ -1) + \text{Vect}((0,\ 1,\ 0),\ (1,\ 0,\ 1))$ est un plan affine de $\mathbb{R}^3$.
3. L'ensemble des solutions de l'équation différentielle $y' + a(x)y = b(x)$ est une droite affine de $\mathcal{C}^0(I, \mathbb{R})$.
4. L'ensemble des suites réelles vérifiant une relation du type $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$ avec $(a,\ b,\ c) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$, est un plan affine de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

`Exemple 3.` Justifier que :

1. les droites affines de $\mathbb{R}^2$ sont les ensembles de points d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$.
2. les plans affines de $\mathbb{R}^3$ sont les ensembles de points d'équation cartésienne $ax+by+cz+d = 0$ avec $(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$.

Exercice : 2

($*$) Soit $a \in \mathbb{K}$. Montrer que $\mathcal{H} = \{P \in \mathbb{K}[X] \mid P(a) = 1\}$ est un hyperplan affine de $\mathbb{K}[X]$.

DÉFINITION 3 : On dira que trois points $A,\ B$ et C sont alignés ssi les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont liés.

PROPOSITION 2 : Soit $(A,\ B,\ C) \in E^3$.

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{0} \iff A = B$
2. $\overrightarrow{AB} = -\overrightarrow{BA}$
3. $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC}$

Preuve 2 : Immédiat !

DÉFINITION 4 : **Translation**
Soit $\overrightarrow{u} \in E$ un $\mathbb{K}$-ev.

L'application $\phi : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathcal{E} \\ M & \mapsto & M + \overrightarrow{u} \end{array}$ est appelée *translation de vecteur* $\overrightarrow{u}$.

Proposition 3 : On ne change pas le sea $\mathcal{F}$ en prenant un autre point de $\mathcal{F}$ comme origine.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} \mathcal{F} = A + \overrightarrow{F} \\ B \in \mathcal{F} \end{cases} \quad \text{alors} \quad \mathcal{F} = B + \overrightarrow{F}$$

Preuve 3 : Démonstration classique par double inclusion.

2 Intersection de deux sous-espaces affines

Théorème 4 : **Intersection de sous-espaces affines**
Soient $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ deux sous-espaces affines de directions $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$.
Si $\boxed{\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset}$, alors $\mathcal{F} \cap \mathcal{G}$ est un sous-espace affine de direction le sous-espace vectoriel $\overrightarrow{F} \cap \overrightarrow{G}$.

Preuve 4 : Soit $C \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$. Prouvons que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} = C + \vec{F} \cap \vec{G}$.
On procède alors très simplement par double inclusion.

Intersection de deux sea

`Exemple 4.` $(*)$ Que pouvez-vous dire de l'intersection de deux plans affines de $\mathbb{R}^3$?

Corollaire 5 : **Intersection de deux sous-espaces affines de directions supplémentaires**
Soient deux sous-espaces affines $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ de directions $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{G}$ telles que $E = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$.
Alors leur intersection est un singleton :

$$\exists \Omega \in \mathcal{F} \cap \mathcal{G} \text{ tel que } \mathcal{F} \cap \mathcal{G} = \{\Omega\}$$

Dans ce cas, on dit que $\mathcal{F}$ et $\mathcal{G}$ sont deux sea supplémentaires.

Preuve 5 :

1. On commence par prouver que $\mathcal{F} \cap \mathcal{G} \neq \emptyset$.
   Soit $\begin{cases} A \in \mathcal{F} \\ B \in \mathcal{G} \end{cases}$. L'idée consiste à décomposer $\vec{AB}$ en utilisant $E = \overrightarrow{F} \oplus \overrightarrow{G}$.
2. Comme les directions sont supplémentaires, alors $\vec{F} \cap \vec{G} = \{0\}$.

Intersection de deux sea supplémentaires du plan

3 Les équations linéaires

THÉORÈME 6 : **Equation Linéaire :** $u(x) = b$
Soit une application linéaire $u : E \mapsto F$ et un vecteur $b \in F$.
L'équation $u(x) = b$ d'inconnue $x \in E$ est appelée *équation linéaire.*
On note $\mathcal{S}_E$ l'ensemble des solutions de cette équation.
Alors :

1. Si $b \notin \operatorname{Im} u$, $\mathcal{S}_E = \emptyset$.
2. Si $b \in \operatorname{Im} u$, il existe une solution particulière $x_0 \in \mathcal{S}_E$. L'ensemble des solutions s'écrit alors

$$\mathcal{S}_E = \{x_0 + k \ ; \ k \in \ker u\}$$

On constate que $\mathcal{S}_E$ est le *sous-espace affine* de l'espace vectoriel $E \begin{cases} \text{de direction } \ker u \\ \text{passant par } x_0 \end{cases}$.

Preuve 6 : Cas où $b \in \operatorname{Im} u$: soit x_0 une solution particulière ($u(x_0) = b$).
On a alors : $x \in S_E \iff u(x) = b \iff u(x) = u(x_0) \iff u(x - x_0) = 0_E \iff x - x_0 \in \ker u \dots$

Solutions d'une équation linéaire :	
Espace E	Espace F

`Exemple 5.` Les équations suivantes sont toutes des équations linéaires :

1.	Systèmes linéaires	$AX = B$	inconnue $X \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$
2.	Equations différentielles	$y'' + ay' + by = u(x)$	inconnue $y \in \mathcal{C}^2(I,\ \mathbb{K})$
3.	Suites récurrentes	$u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n + c$	inconnue $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$
4.	Intégrale	$\int_a^b f = c$	inconnue $f \in \mathcal{C}_m(\mathbb{R},\ \mathbb{K})$
5.	Limite	$(x_n) \to l$	inconnue $(x_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ convergente
6.	Produit scalaire	$\overrightarrow{x}.\overrightarrow{a} = \lambda$	inconnu $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$
7.	Produit vectoriel	$\overrightarrow{x} \wedge \overrightarrow{a} = \overrightarrow{b}$	inconnu $\overrightarrow{x} \in \mathbb{R}^3$
8.	Polynômes interpolateurs	$(P(x_1),\ \dots,\ P(x_n)) = (a_1,\ \dots,\ a_n)$	inconnue $P \in \mathbb{K}[X]$

On peut donc les résoudre en procédant de la façon suivante :

Méthode de résolution d'une équation linéaire

1. Recherche d'une solution particulière : x_0
2. Résolution de l'équation homogène associée : $\overrightarrow{F}$
3. Ensemble des solutions : $\mathcal{S}_E = x_0 + \overrightarrow{F}$

Remarque 3. ⚠ Les méthodes de recherche d'une solution particulière et de résolution de l'équation homogène sont spécifiques à chacune des situations.

`Exemple 6.` $(*)$ Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y' + y = \cos x$
2. $y'' + 2y' + 2y = \operatorname{ch} x$

`Exemple 7.` $(*)$ Déterminer la forme fonctionnelle de la suite vérifiant : $\begin{cases} u_0 = 0 \\ u_1 = 1 \\ u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 1 \end{cases}$

Exercice : 3

$(**)$ Déterminer l'expression du terme général des suites (u_n) vérifiant : $\forall n \in \mathbb{N} : u_{n+2} = u_{n+1} - u_n + 1$

4 Repères cartésiens

DÉFINITION 5 : **Repère cartésien**

Soit $\mathcal{F}$ un sous-espace affine de E de direction $\overrightarrow{F}$.

On appellera *repère cartésien* de $\mathcal{F}$ un couple $(\Omega,\ b)$ où $\begin{cases} \Omega \text{ est un point de } \mathcal{F} \\ b \text{ une base de } \overrightarrow{F} \end{cases}$.

Ce repère sera noté $\mathcal{R}(\Omega,\ b)$ ou $(\Omega,\ b)$ et Ω sera appelé *l'origine* du repère.

Remarque 4. Si $\mathcal{F} = \mathbb{R}^n$, on appelle *repère canonique* le repère formé de $O = (0,\ \dots,\ 0)$ et de la base canonique de $\mathbb{R}^n$.

DÉFINITION 6 : **Coordonnées d'un point**

Si $A \in \mathcal{F}$, on appellera *coordonnées* de A dans le repère $\mathcal{R}(\Omega, b)$ les composantes du vecteur $\overrightarrow{\Omega A}$ dans la base b.

Remarque 5. **Notations :**

Plaçons-nous dans le repère $\mathcal{R}(\Omega,\ b)$.

Si les coordonnées de $\overrightarrow{\Omega A}$ dans b sont $(x_1, \dots, x_n)$, alors on notera : $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ ou $A\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

On utilisera également cette notation pour noter les composantes d'un vecteur dans la base b.

Exercice : 4

$(*)$ Soit $\mathcal{F} = \{(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ u_{n+2} = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} + u_n) + 1\}$.

Déterminer un repère de $\mathcal{F}$.

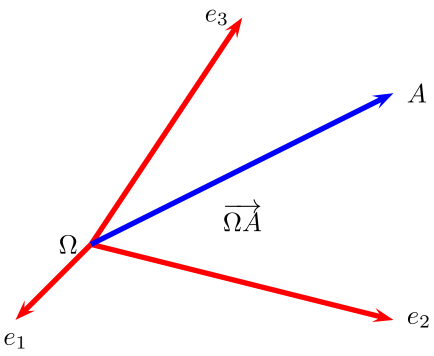


FIGURE 1 – Coordonnées de A dans $\mathcal{R}(\Omega,\ e_1,\ e_2,\ e_3)$

THÉORÈME 7 : **Formule de changement de repère**
Considérons deux repères cartésiens $\mathcal{R} = (O, b)$ et $\mathcal{R}' = (\Omega, b')$.
Soit M un point quelconque de l'espace.
En notant

$$M\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}},\quad M\begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'},\quad \Omega\begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix}_{\mathcal{R}},\quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix},\quad X' = \begin{pmatrix} x'_1 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},\quad \Omega = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = P_{b\mapsto b'}$$

on a la formule de changement de repère :

$$\boxed{X = \Omega + PX'}$$

Preuve 7 : Tout simplement parce que $O\vec{M} = O\vec{\Omega} + \Omega\vec{M}$ et que les coordonnées de $\Omega\vec{M}$ dans b sont PX'.

Remarque 6. Les formules de changement de repère dans un espace de dimension 2 sont donc de la forme :

$$\left\{\begin{array}{lll} x & = \alpha & +ax' + by' \\ y & = \beta & +cx' + dy' \end{array}\right. \qquad \text{ou après inversion} \qquad \left\{\begin{array}{lll} x' & = \alpha & +ax + by \\ y' & = \beta & +cx + dy \end{array}\right.$$

`Exemple 8.` $(*)$ Soit $\mathbb{R}^2$ muni du repère $\mathcal{R}(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$. On note $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ les coordonnées d'un point dans ce repère.
Pour quels nouveaux repères a-t-on les formules de changement de repères suivantes :

1. $\left\{\begin{array}{l} x = 2 - x' + 3y' \\ y = -1 + 2x' - y' \end{array}\right.$?
2. $\left\{\begin{array}{l} x' = 2 - x + 3y \\ y' = -1 + 2x - y \end{array}\right.$?

`Exemple 9.` $(*)$ Donner la forme des formules de changement de repères correspondant à :

1. un changement de centre
2. un changement de base
3. à une rotation de la base initiale (supposée ici orthonormée).

`Exemple 10.` $(*)$ Soit $\mathbb{R}^2$ muni du repère $\mathcal{R}(O,\ \vec{i},\ \vec{j})$ et $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ et $B\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}}$ deux points.
Dans quels repères $\mathcal{R}'$ les points A et B ont pour coordonnées : $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$ et $B\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}_{\mathcal{R}'}$?

5 Exercices de TD

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs $\heartsuit$ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs $\heartsuit$ correspond à la difficulté des exercices.

Exercice de TD : 1

$(*)$ Dans le plan affine, on considère 2 droites $\left\{\begin{array}{l} D_1 \\ D_2 \end{array}\right.$ qui se coupent en O et 2 droites $\left\{\begin{array}{l} D_1' \\ D_2' \end{array}\right.$ qui se coupent en O'.

On définit les points $A = D_2 \cap D_1'$ $\quad B = D_2 \cap D_2'$ $\quad A' = D_1 \cap D_2'$ $\quad$ et $\quad B' = D_1 \cap D_1'$.

Montrer que les milieux des segments $[AA']$, $[BB']$ et $[OO']$ sont alignés.

Exercice de TD : 2

$(*)$ Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$ munis d'un repère orthonormé, on considère les droites d'équations cartésiennes :

$$\mathcal{D} \left\{\begin{array}{l} x = z - 1 \\ y = 2z + 1 \end{array}\right. \text{ et } \mathcal{D}' : \left\{\begin{array}{l} y = 3x \\ z = 1 \end{array}\right.$$

Montrez qu'il existe un unique couple de plans $(\mathcal{P},\ \mathcal{P}')$ tels que : $\mathcal{D} \subset \mathcal{P}$, $\mathcal{D}' \subset \mathcal{P}'$ et $\mathcal{P}$ parallèle à $\mathcal{P}'$.
Déterminez une équation cartésienne de ces plans.

Exercice de TD : 3

$(*)$ Dans l'espace affine $\mathbb{R}^3$, on considère les droites d'équations : $\mathcal{D}_1 \left\{\begin{array}{l} x - 2z = 1 \\ y = z + 2 \end{array}\right.$ et $\mathcal{D}_2 : \left\{\begin{array}{l} x + y + z = 1 \\ x - 2y + 2z = a \end{array}\right.$
Trouver une CNS sur le paramètre a pour que les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ soient coplanaires.

Exercice de TD : 4

$(**)$ On considère 2 plans distincts $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$.
Soient A, B et C, 3 points non alignés de $\mathcal{P}$ et O un point n'appartenant pas à $\mathcal{P}$.
On construit les points A', B' et C', intersections respectives de (OA), (OB) et (OC) avec $\mathcal{P}'$.
Soient G et G' les centres de gravité de ABC et $A'B'C'$.

Déterminez une CNS pour que O, G et G' soient alignés.

Exercice de TD : 5

$(*)$ Soient h, a, b, p et q des paramétres réels.
On considère dans $\mathbb{R}^3$ munis de sa structure affine euclidienne usuelle, la droite $\mathcal{D}$: $\left\{\begin{array}{l} x = az + p \\ y = bz + q \end{array}\right.$ et les points $A(0,\ 0,\ h)$ et $A'(0,\ 0,\ -h)$. On suppose que $A,\ A' \notin \mathcal{D}$.

1. Donner une équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ (resp. $\mathcal{P}'$) passant par A (resp. A') contenant $\mathcal{D}$.
2. Trouver une CNS sur a, b, p, q et h pour que $\mathcal{P}$ et $\mathcal{P}'$ soient perpendiculaires.

Exercice de TD : 6

$(\heartsuit\heartsuit)$ Soit V une partie non vide de $\mathcal{E}$ une espace affine de dimension finie.
Montrer que V est un sous-espace affine si et seulement si pour tout couple $(A,\ B)$ de points distincts de V, la droite (AB) est incluse dans V.