Systèmes d'équations linéaires

—

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

10 mai 2017

1 Vocabulaire

Soit $\{a_{ij}\}_{(i,j)\in[\![1,n]\!]\times[\![1,p]\!]}$ et $\{b_i\}_{i\in[\![1,n]\!]}$ deux familles de scalaires de $\mathbb{K}$.

On considère le système de n équations à p inconnues : (S) $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = b_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = b_n \end{cases}$

On appelle alors : $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1p} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$ la matrice du système

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{K})$ le vecteur second membre

$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \in \mathfrak{M}_{p1}(\mathbb{K})$ le vecteur inconnu

Avec ces notations, le système $(\mathcal{S})$ s'écrit alors : $\boxed{AX = B}$

Définition 1 : **Vocabulaire lié aux systèmes**

1. *Résoudre* le système consiste à trouver l'ensemble de **tous** les p-uplets $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{K}^p$ vérifiant (S).
   L'ensemble des solutions est en général noté $\mathbb{S}$.

2. On appelle *système homogène* (S_0) associé à (S), le système obtenu en prenant $B = 0$.
   On note $S_0 = \ker A$ l'ensemble des solutions du système homogène.

3. $\text{rg}(A)$ s'appelle le *rang* du système.
   Il s'agit à la fois du nombre de colonnes de A linéairement indépendantes, mais aussi du nombre d'équations indépendantes du système (S_0) !

4. On dit que le système est *compatible* si l'ensemble des solutions est non-vide.
   Ce sera le cas si et seulement si $B \in \text{Im}\, A$.

Remarque 1. Dans ce cours, on reprend les conventions utilisées dans le chapitre sur les matrices.

2 Interprétation duale

Considérons les n formes linéaires de $\mathbb{K}^{p\star}$: $f_i\ :\ \begin{array}{ccc} \mathbb{K}^p & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ (x_1,\ \dots,\ x_p) & \mapsto & a_{i1}x_1 + \cdots + a_{ip}x_p \end{array}$

Alors

$$\boxed{x = (x_1,\ \dots,\ x_p) \in \mathbb{K}^p \text{ est solution de (S)} \iff \begin{cases} f_1(x) = b_1 \\ \vdots \\ f_n(x) = b_n \end{cases}}$$

Proposition 1 : **Structure de l'ensemble des solutions (selon n et p)**
L'ensemble des solutions $\mathbb{S}$ d'un système linéaire de n équations à p inconnues est l'intersection de n hyperplans affines de $\mathbb{K}^p$. Ainsi :

1. Soit il n'y a pas de solution,
   Soit l'ensemble des solutions est un sous-espace affine de $\mathbb{K}^p$.
2. lorsque $n \geq p$ et que le système est compatible, on a $\dim \mathbb{S} \geq p - n$.

Preuve 1 : Immédiat compte-tenu des résultats connus sur les hyperplans vectoriels et sur l'intersection de sous-espaces affines.

3 Structure de l'ensemble des solutions

Soit un système linéaire (S) à n équations et p inconnues.

Théorème 2 : **Structure de l'ensemble des solutions du système homogène : S_0**
L'ensemble des solutions du système homogène (S_0) est $\ker A$. C'est donc un sev de $\mathbb{K}^p$.
On a ainsi :

$$\boxed{\dim S_0 = \text{nombre d'inconnues} - \text{rg}(S)}$$

Preuve 2 : On utilise le théorème du rang.

Remarque 2. $\dim S_0$ est donc la différence entre le nombre d'inconnues et le nombre d'équations indépendantes.

Exercice : 1
(∗∗) Déterminez la dimension du sev de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ constitué des matrices dont la somme des coefficients de chaque colonne est identique.

Théorème 3 : **Structure de l'ensemble des solutions de (S) (selon p et r)**
Soit p le nombre d'inconnues.

1. Si le système est incompatible, $\mathbb{S} = \emptyset$.
2. Si le système est compatible, alors il existe une solution particulière x_0.

   Dans ce cas, $\boxed{\mathbb{S} = \{x_0 + x \mid x \in \mathbb{S}_0\}}$ et $\mathbb{S}$ est un espace affine de dimension $\boxed{p - \text{rg}(S)}$.

Preuve 3 :
Il s'agit de la structure de l'ensemble des solutions d'une équation linéaire ...
On peut cependant proposer une nouvelle démonstration plus directe :

$$\begin{array}{rcl} X \text{ solution de } (S) & \iff & AX = B \\ & \iff & AX = AX_0 \\ & \iff & A(X - X_0) = 0 \\ & \iff & X - X_0 \in \ker A \end{array}$$

`Exemple 1.`

Déterminer l'ensemble des solutions de $\begin{cases} x-y+z-3t & = 1 \\ 2y+z-t & = -1 \\ x-y+t & = 3 \end{cases}$ sachant que $\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ est solution.

Corollaire 4 :

1. Si $\text{rg}(S) = p$ (le nombre d'inconnues) alors S admet au plus une solution
2. Si $\text{rg}(S) = n$ (le nombre d'équations) alors S est compatible

Preuve 4 :

1. Si $\mathcal{S}$ admet une solution alors $\mathbb{S}$ est un sous espace affine de dimension 0.
2. Si $\text{rg}(S) = n$ alors $\text{Im}(A) = \mathbb{R}^n$ et donc $B \in \text{Im}(A)$.

4 Systèmes de Cramer

Proposition 5 : **Unicité de la solution**
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
Un système $AX = B$ admet une unique solution si et seulement si A est une matrice inversible (cad $\det A \neq 0$).

Preuve 5 :

$\Rightarrow$ On prouve facilement que $\ker A = \{0\}$ et comme A est une matrice carrée, alors $A \in \text{GL}_n(\mathbb{K})$.

$\Leftarrow$ Immédiat !

Définition 2 : **Système de Cramer**
Un système $AX = B$ est dit *de Cramer* lorsque A est une matrice inversible.

Remarque 3. Un système de Cramer est donc un système $n \times n$ qui admet une unique solution.
On verra dans le cours sur les déterminants qu'on reconnaît un système de Cramer au fait que son déterminant est non nul.

Proposition 6 : **Systèmes de Cramer particuliers**

1. Un système triangulaire est un système de Cramer ssi tous ses termes diagonaux sont non nuls.
   Un tel système se résout facilement pas à pas.
2. Un système de cramer homogène n'admet que le vecteur nul pour solution.

Preuve 6 :

1. Le déterminant d'un système triangulaire est égal au produit des coefficients diagonaux. Par conséquent, ce déterminant est non nul si et seulement si tous les coefficients diagonaux sont non nuls.
2. Le vecteur nul est une solution évidente d'un système homogème. Or un système de cramer n'admet qu'une unique solution. CQFD ...

`Exemple 2.` Prouver que la famille $\{x \mapsto \cos x,\ x \mapsto \sin x,\ x \mapsto e^x\}$ de $\mathcal{F}(\mathbb{R},\ \mathbb{R})$ est libre.

Exercice : 2

($**$) On souhaite résoudre le système $\left\{ \begin{array}{l} x+ay+a^2z = \alpha \\ x+by+b^2z = \beta \\ x+cy+c^2z = \gamma \end{array} \right.$ où $\left\{ \begin{array}{l} a,\ b \text{ et } c \text{ sont des scalaires deux à deux distincts} \\ \alpha,\ \beta,\ \gamma \in \mathbb{K} \end{array} \right.$.

1. Reformuler le problème en utilisant le polynôme : $P = x + yX + zX^2$.
2. En déduire que le système est de cramer.
3. En déduire ses solutions.

5 Résolution par la Méthode de Gauss

DÉFINITION 3 : On appelle << opération élémentaire sur les lignes >> l'une des 3 opérations suivantes :

1. Echanger deux lignes
2. Remplacer une ligne L_i par $\lambda.L_i$ où $\lambda \in \mathbb{K}^*$
3. Remplacer une ligne L_i par $L_i + \lambda.L_j$ où $\lambda \in \mathbb{K}$

THÉORÈME FONDAMENTAL 7 :
On ne change pas l'ensemble des solutions d'un système en effectuant une opération élémentaire sur les lignes.

Preuve 7 : Il suffit de remarquer que $AX = B \Longleftrightarrow PAX = PB$ pour toute matrice inversible, et qu'effectuer une OEL consiste à multiplier $AX = B$ à gauche par une matrice inversible particulière.

Remarque 4. On utilisera le théorème précédent pour transformer le système $AX = B$ en un système simple à résoudre. Le plus souvent, on transformera (S) en un système triangulaire (ou presque). Cette technique s'appelle la méthode de Gauss.

Méthode de Gauss

1. On place en première ligne une équation qui fait apparaître la première inconnue.
   On choisit de préférence (si possible) la ligne telle que la première inconnue a un coefficient "1".
2. On utilise cette équation pour éliminer par OEL la première inconnue des autres équations.
3. On applique les opérations précédentes au sous-système obtenu où la première inconnue ne figure plus.

Remarque 5. *Pour effectuer ce travail dans de bonnes conditions, le système doit être proprement écrit et les inconnues correctement alignées.*

Remarque 6. On pourra simplifier un peu les calculs en présentant le système sous la forme $\left(\begin{array}{c|c} \quad A \quad & B \end{array}\right)$.

Méthode : cas d'un système de cramer
Par OEL on transforme le système en un système équivalent triangulaire.
On détermine alors les inconnues à partir de la dernière équation obtenue.

Exemple 3. Résoudre le système suivant : $(S)\quad \begin{cases} -2x + y + z - t & = 1 \\ x - 2y + z & = 0 \\ x - 2z + t & = -1 \\ y - z + 2t & = 1 \end{cases}$

Méthode : cas où il y a "trop d'inconnues"
Si, après avoir triangularisé le système, le nombre d'inconnues est supérieur au nombre d'équations, on décide alors d'attribuer aux inconnues supplémentaires le statut de paramètres.
On recherche alors les autres inconnues en fonction de ces paramètres.

Exemple 4. Résoudre les systèmes suivants :

1. $(S1)\quad \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 & = 3 \\ 2x_1 - x_2 + x_4 & = 1 \\ -x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 & = 3 \end{cases}$
2. $(S2)\quad \begin{cases} mx + y + z + t & = 1 \\ x + my + z + t & = m \\ x + y + mz + t & = m + 1 \end{cases}$

Remarque 7. Dans le cas des systèmes paramètrés, on aura souvent intérêt à commencer par déterminer les valeurs du paramétre qui annulent le déterminant. On traite alors ces différents cas à part.

Méthode : cas où il n'y a pas de solutions
Dans certains cas, la triangularisation aboutit à une équation impossible.
Dans ce cas le système n'admet pas de solutions.

`Exemple 5.` Résoudre le système suivant : $(S)\ \begin{cases} x+2y-z & =-4 \\ 2x+y+z & =1 \\ x-y+z & =4 \\ 2x-2y+7z & =3 \end{cases}$

6 Exercices de TD

I] Résolution de systèmes paramétrés

La résolution des systèmes paramétrées linéaires se traite comme les autres systèmes linéaires, en suivant la méthode du pivot de Gauss. Il faut néanmoins être prudent en faisant des cas dès que l'on souhaite diviser par un terme qui peut éventuellement être nul.

Exercice de TD : 1

($\ast\ast$) Discuter et résoudre les systèmes suivants où $a,\ b,\ c,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma$ sont des réels :

$$S_1 \begin{cases} x+y+z & =a \\ x+y-2z & =b \\ x+y-3z & =c \end{cases} \quad S_2 \begin{cases} ax+y+z & =\alpha \\ x+ay+z & =\beta \\ x+y+az & =\gamma \end{cases} \quad S_3 \begin{cases} x+ay+a^2z & =1 \\ x+by+b^2z & =0 \\ x+cy+c^2z & =1 \end{cases} \quad S_4 \begin{cases} -x+y+z & =1 \\ x-y+z & =b \\ x+y-z & =b^2 \end{cases}$$

Exercice de TD : 2

($\heartsuit\heartsuit$) Résoudre le système suivant en discutant selon les valeurs du paramètre m $\begin{cases} x-my+m^2z & =2m \\ mx-m^2y+mz & =2m \\ mx+y-m^2z & =1-m \end{cases}$.

II] Applications de la résolution de système

Les problèmes suivants se résolvent par une mise en équation débouchant sur la résolution d'un système. Parfois, lorsque seule l'unicité de la solution nous importe, on pensera à utiliser le déterminant.
Ces exercices ne posent aucune difficulté et on pour principal objectif de montrer différentes situations qui aboutissent à la résolution d'un système linéaire.

Exercice de TD : 3

($\ast\ast$) Soit $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ et u l'endomorphisme canoniquement associé à A.

1. Montrer qu'il existe une base de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de u est une matrice diagonale D.
2. Déterminer $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = P^{-1}DP$.
3. A quoi peut servir le travail précédent ?

Exercice de TD : 4

($\ast\ast$)

1. Montrer que la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$ est semblable à une matrice diagonale D que l'on déterminera.
2. Donner la relation entre A et D.
3. A quoi peut servir une telle transformation ?

Exercice de TD : 5

($**$) Équilibrer les réactions chimiques :

$$\begin{aligned} x_1 IO_3^- + x_2\left(C_5H_{11}O_5 - COH\right) + x_3 OH^- &\rightarrow x_4 I^- + x_5\left(C_5H_{11}O_5 - CO_2^-\right) + x_6 H_2O \\ x_1 KMnO_4 + x_2 H_2SO_4 + x_3 KBr &\rightarrow x_4 K_2SO_4 + x_5 Br_2 + x_6 MnSO_4 + x_7 H_2O \end{aligned}$$

Exercice de TD : 6

($\heartsuit$)

1. Montrer que dans tout triangle ABC, on a :
$$\begin{cases} a = b\cos C + c\cos B \\ b = c\cos A + a\cos C \\ c = a\cos B + b\cos A \end{cases}$$
2. Dans cette question, on considère que les inconnues du système ci-dessus sont $\cos A, \cos B, \cos C$.
A priori, le système est-il compatible ou incompatible ? Le résoudre.
3. Maintenant les inconnues sont a, b, c.
Quel est *a priori* la dimension du sous-espace affine des solutions ? Résoudre le système.

Exercice de TD : 7

($*$) Calculer l'inverse de la matrice complexe suivante : $A = \begin{pmatrix} 1+i & -1 & 2i \\ i & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice de TD : 8

($*$) Donner une base du sev de $\mathbb{R}^5$ défini par les équations : $\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + 3x_4 + x_5 & = 0 \\ x_2 + x_3 - 2x_4 + 2x_5 & = 0 \\ 2x_1 + x_2 - 5x_3 - 4x_5 & = 0 \end{cases}$.

Exercice de TD : 9

($*$) Déterminer un système d'équations cartésiennes indépendantes du sev de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs : $(1,\ 0,\ 1,\ 0)$, $(2,\ 1,\ 0,\ 1)$, $(0,\ 1,\ -3,\ -2)$ et $(1,\ 0,\ 2,\ 3)$