Les déterminants

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

10 mai 2017

$$\begin{vmatrix} 1 & a_1 & {a_1}^2 & \dots & {a_1}^{n-1} \\ 1 & a_2 & {a_2}^2 & \dots & {a_2}^{n-1} \\ 1 & a_3 & {a_3}^2 & \dots & {a_3}^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & {a_n}^2 & \dots & {a_n}^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1\leq i<j\leq n} (a_j - a_i)$$

Déterminant de Vandermonde

Ce chapitre à pour objectif de redéfinir et généraliser les notions de déterminants d'ordres 2 et 3 vues en début d'année.

1 Formes n-linéaires alternées

`Exemple 1.` Etude des propriétés de l'application $\varphi : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ telle que :

$$\varphi(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v}) = \text{l'aire algébrique du parallèlogramme de côtés } \overrightarrow{u} \text{ et } \overrightarrow{v}$$

1. Linéarité par rapport à chacune des deux variables
2. Antisymétrie
3. Cas où l'un des vecteurs est nul
4. Cas où les deux vecteurs sont colinéaires

Propriétés de φ

Définition 1 : Applications n-linéaires
Soient deux $\mathbb{K}$-ev E et F.
On dit qu'une application $\phi : E^n \mapsto F$ est une application n-linéaire si et seulement si :

$\forall i \in [1, n],\ \forall (x_1, \dots,\ x_{i-1},\ x_{i+1}, \dots,\ x_n) \in E^{n-1},\ \forall (x,\ y) \in E^2,\ \forall (\lambda,\ \mu) \in \mathbb{K}^2$ on a :

$$\boxed{\phi(x_1, .., \ x_{i-1},\ \lambda x + \mu y,\ x_{i+1}, .., \ x_n) = \lambda\phi(x_1, .., \ x_{i-1},\ x,\ x_{i+1}, .., \ x_n) + \mu\phi(x_1, .., \ x_{i-1},\ y,\ x_{i+1}, .., \ x_n)}$$

Remarque 1. En d'autres termes, ϕ est n-linéaire ssi ϕ est linéaire par rapport à chacune des variables, les autres étant fixées.

Remarque 2. NOTATIONS :

1. On note $\mathcal{L}^n(E,\ F)$ l'ensemble des applications n-linéaires sur E à valeurs dans F.
   Attention : cette notation est un peu ambigüe car une application n-linéaire est une application de E^n dans F.
2. On dira que $\phi \in \mathcal{L}^n(E,\ F)$ est une *forme n-linéaire* dès lors que $F = \mathbb{K}$.
   On note $\mathcal{L}^n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires. (cette notation n'a rien à voir avec les endomorphismes)

Remarque 3. : $\mathcal{L}^p(E,\ F)) \neq \mathcal{L}(E^p,\ F)$

Proposition 1 : Premières propriétés

Soit $\phi \in \mathcal{L}^n(E,\ F)$.
$\forall (x_1, \dots,\ x_n) \in E^n$, $\forall (\lambda_1, \dots,\ \lambda_n) \in \mathbb{K}^n$:

1. $\phi(x_1, \dots,\ x_{i-1},\ 0_E,\ x_{i+1}, \dots,\ x_n) = 0_F$.
2. $\phi(\lambda_1 x_1, \dots,\ \lambda_n x_n) = \lambda_1. \cdots .\lambda_n.\phi(x_1, \dots,\ x_n)$.

Preuve 1 : Immédiat.

Définition 2 : Types d'applications n-linéaires
Soient E et F deux $\mathbb{K}$-ev et $n \in \mathbb{N}^*$.
Soit $\phi \in \mathcal{L}^n(E,\ F)$ et $v = (v_1, \dots,\ v_b) \in E^n$.
On dira que :

1. ϕ est *symétrique* lorsque $\phi(v)$ est inchangée lorsqu'on échange la place de 2 vecteurs v_i et v_j.
2. ϕ est *antisymétrique* lorsque $\phi(v)$ est transformé en son opposé lorsqu'on transpose 2 vecteurs.
3. ϕ est *alternée* lorsque $\phi(v) = 0$ dès lors que v comporte 2 vecteurs v_i et v_j identiques.

`Exemple 2.`

1. $\phi : \begin{array}{ccc} C^0([0;1], \mathbb{R})^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,\ g) & \mapsto & \int_0^1 fg \end{array}$ est une forme bilinéaire symétrique.

2. $\phi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (\vec{u},\ \vec{v}) & \mapsto & \vec{u}.\vec{v} \end{array}$ est une forme bilinéaire symétrique.

3. $\phi : \begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2)^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ ((a,\ b),\ (c,\ d)) & \mapsto & \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix} \end{array}$ est une forme bilinéaire antisymétrique.

Proposition 2 : Equivalence entre antisymétrique et alternée
Pour toute application n-linéaire $\phi \in \mathcal{L}^n(E,\ F)$, on a :

$$\phi \text{ alternée } \iff \phi \text{ antisymétrique}$$

Preuve 2 :

1. Si ϕ est alternée, alors on considère $\phi(v_1, \dots,\ v_i + v_j,\ \dots,\ v_i + v_j,\ \dots,\ v_n) = 0$
2. Si ϕ est antisymétrique, alors on considère $\phi(v_1, \dots,\ v_i,\ \dots,\ v_i,\ \dots,\ v_n)$

Proposition 3 : **Image d'une famille liée par une application n-linéaire alternée**
Soit une application n-linéaire alternée $\phi \in \mathcal{L}^n(E,\ F)$ et un système $\{x_1,\ \dots, x_p\}$ une famille de vecteurs de E.
Alors :

$$S \text{ lié} \quad \Rightarrow \quad \phi(x_1,\ \dots,\ x_p) = 0_F$$

Preuve 3 : On considère par exemple que x_1 est combinaison linéaire des autres vecteurs...

Proposition 4 : **Effet d'une permutation sur une application n-linéaire alternée**
Soit $\phi \in \mathcal{L}^n(E,\ F)$, $(v_1, \dots,\ v_n) \in E^n$ et $\sigma \in S_n$. Alors :

$$\boxed{\phi(v_{\sigma(1)}, \dots,\ v_{\sigma(n)}) = \varepsilon(\sigma).\phi(v_1,\ \dots,\ v_n)}$$

Preuve 4 : On fait une récurrence sur le nombre de transpositions qui décomposent σ.

2 Déterminant d'un système de vecteurs

Dans toute la suite, nous nous intéresserons aux $\boxed{\text{formes } n\text{-linéaires alternées sur un espace de dimension } n}$.

On notera $\mathcal{A}^n(E)$ l'ensemble des formes n-linéaires alternées sur un ev E de dimension n.

2.1 Définition de l'application déterminant

Exercice : 1

On considère un espace vectoriel E_2 de dimension 2, et $(e_1,\ e_2)$ une base de cet espace.
Déterminer l'ensemble des formes 2-linéaires alternées.

Dans toute la suite du cours on considère désormais un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie n.

Théorème 5 : **Si $\dim E = n$, alors $\mathcal{A}^n(E)$ est une droite vectorielle**
Soit $e = (e_1, \dots,\ e_n)$ une base de l'espace vectoriel E.
Soit :

$$\boxed{\begin{array}{cccc} \det_e : & E^n & \longrightarrow & \mathbb{K} \\ & (X_1, \dots,\ X_n) & \mapsto & \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma).x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(n)n} \end{array}} \quad \text{où} \quad \mathrm{Mat}_e(X_1, \dots,\ X_n) = ((x_{ij}))_{1 \le i,j \le n}$$

Alors :

1. $\mathcal{A}^n(E)$ est la droite vectorielle engendrée par $\det_e$: $\mathcal{A}^n(E) = \mathrm{Vect}(\det_e)$.
2. $\det_e$ est l'unique forme n-linéaire alternée φ vérifiant $\varphi(e_1, \dots,\ e_n) = 1$.

Preuve 5 :

1. On considère $\phi \in \mathcal{A}^n(E)$ et $(X_1, \dots,\ X_n) \in E^n$ tel que $\mathrm{Mat}_e(X_1, \dots,\ X_n) = ((x_{ij}))_{1 \le i,j \le n}$.

   Calculons :
$$\begin{aligned} \phi(X_1, \dots,\ X_n) &= \phi(\sum_{i=1}^n x_{i1}e_i, \dots, \sum_{i=1}^n x_{in}e_i) = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(n)n}.\phi(e_{\sigma(1)}, \dots,\ e_{\sigma(n)}) \\ &= \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma).x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(n)n}.\phi(e_1, \dots,\ e_n) \\ &= \det_e(X_1, \dots,\ X_n).\phi(e_1, \dots,\ e_n) \end{aligned}$$

2. On démontre de façon directe que $\det_e \in \mathcal{A}^n(E)$. (*Démonstration non exigible !*)
   (a) La n-linéarité ne pose pas de difficulté.
   (b) On montre le caractère alterné en effectuant un changement d'indice $\sigma' = \sigma \circ \tau_{ij}$.
   (c) On montre que $\det_e(e_1,\ e_2, \dots,\ e_n) = 1$ en remarquant que $\forall k \in [\![1, n]\!],\ e_k = \displaystyle\sum_{i_k=1}^n \delta_{i_k k} e_{ik}$.

DÉFINITION 3 : **Déterminant d'un système de vecteurs dans une base**
Soit un espace vectoriel E de dimension n et une base $e = (e_1, \dots,\ e_n)$ de cet espace.
Soit un système de n vecteurs $S = (X_1, \dots, X_n)$.
On note x_{ij} la coordonnées du vecteur X_j selon e_i.
On appelle *déterminant* du système S dans la base e, le scalaire :

$$\boxed{\det_e(S) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) x_{\sigma(1)1} \dots x_{\sigma(n)n}} \quad \text{que l'on note} \quad \det_e(S) = \begin{vmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{vmatrix}$$

Remarque 4.

1. On retrouve ainsi les formules du déterminant rencontrées en début d'année pour $n = 2$ et $n = 3$.
2. Bien retenir que $\mathcal{A}^n(E)$ est une droite vectorielle engendrée par l'application $\det_e$ car ce résultat est régulièrement utilisé dans les exercices.

Exercice : 2
(∗∗) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n, $f \in \mathcal{L}(E)$ et $e = (e_1,\ \dots,\ e_n)$ une base de E.
Montrer que il existe $\lambda \in \mathbb{C}$ (à déterminer) tel que $\displaystyle\sum_{j=1}^{n} \det_e(X_1\ \dots,\ f(X_j),\ \dots,\ X_n) = \lambda. \det_e(X_1,\ \dots,\ X_n)$.

PROPOSITION 6 : **Interprétation dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$:**
Lorsque $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$ sont munis d'une base orthonormée directe, on constate que :

1. dans $\mathbb{R}^2$, le déterminant de deux vecteurs correspond à la valeur algébrique de l'aire du parallélogramme construit à partir de ces deux vecteurs.
2. dans $\mathbb{R}^3$, le déterminant de 3 vecteurs correspond à la valeur algébrique du volume du parallèlépidède construit à partir de ces trois vecteurs.

Preuve 6 : On remarque que ces deux formes f sont $\left\{\begin{array}{c} n\text{\_linéaires} \\ \text{alternées} \end{array}\right.$ et vérifient $f(e) = 1$

2.2 Propriétés de base

PROPOSITION 7 : **Propriétés élémentaires du déterminant**

1. Echanger la place de deux vecteurs multiplie le déterminant par -1.
2. Si deux vecteurs sont identiques, le déterminant est nul.
3. Le déterminant d'un système lié est nul.
4. Ajouter à un vecteur une combinaison linéaire des autres vecteurs ne change pas la valeur du déterminant.
5. Multiplier **un seul** des vecteurs par λ multiplie le déterminant par λ.
6. Multiplier tous les vecteurs par λ multiplie le déterminant par λ^n.

Preuve 7 : Pas de difficulté.

THÉORÈME 8 : **Formule de changement de base**
Soit un $\mathbb{K}$-espace vectoriel E de dimension n et $\left\{\begin{array}{l} e = (e_1, \dots,\ e_n) \\ e' = (e'_1, \dots,\ e'_n) \end{array}\right.$ deux bases de E.
Pour tout système $S = (X_1, \dots,\ X_n)$ de n vecteurs de E, on a :

$$\boxed{\det_{e'}(X_1, \dots,\ X_n) = \det_{e'}(e) \times \det_e(X_1, \dots,\ X_n)}$$

Preuve 8 : Les déterminants dans deux bases e et e' de E sont deux formes n-linéaires alternées de E.
Ils sont donc proportionnels ...

Remarque 5. Sachez retrouver cette formule en retenant que $\det_e$ et $\det_{e'}$ sont proportionnels.

L'intérêt principal du déterminant réside dans la propriété suivante :

> Théorème Fondamental 9 : **Caractérisation des bases**
> Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n de base e et $S = (X_1, \dots,\ X_n)$ un système de n vecteurs de E. Alors :
> $$S \text{ est une base de } E \Longleftrightarrow \det_e(X_1, \dots,\ X_n) \neq 0$$

Preuve 9 :

- $\Rightarrow$ Il suffit d'utiliser la formule de changement de bases précédente.
- $\Leftarrow$ Par contraposée en utilisant le fait que $\det_e \in \mathcal{A}^n(E)$ ...

Exercice : 3

$(*)$ Soit $e = (1 + X + X^2,\ 1 + 2X + 4X^2,\ 1 + 3X + 9X^2)$ une famille de polynômes de $\mathbb{R}_2[X]$.
Montrer que e est une base de $\mathbb{R}_2[X]$

> Définition 4 : **Orientation d'une base**
> Soient e et e' deux bases de E un $\mathbb{R}$-ev.
> On dira que :
> 1. e et e' ont la même orientation si et seulement si $\det_e(e') > 0$
> 2. e et e' ont une orientation opposée si et seulement si $\det_e(e') < 0$

`Exemple 3.` Vérifier sur un exemple en dimension 2 que cette définition de l'orientation de deux bases est bien cohérente avec votre connaissance intuitive de cette notion.

3 Déterminant d'un endomorphisme

Il est plus judicieux de commencer par définir la notion de *déterminant d'un endormorphisme* avant celle de *déterminant d'une matrice*, car les propriétés du premier se transfèrent très facilement au second.

> Définition 5 : Soit φ un endomorphisme de E et $\mathcal{B}$ une base de E.
> Le déterminant de φ dans la base $\mathcal{B}$ est :
> $$\det_{\mathcal{B}}(\varphi) = \det_{\mathcal{B}}(\varphi(e_1),\ \dots,\ \varphi(e_n)) \quad = \det_{\mathcal{B}}(\varphi(\mathcal{B}))$$

> Théorème Fondamental 10 : Le déterminant d'un endomorphisme est indépendant de la base choisie.

Preuve 10 : Soit $\varphi \in L(E)$ et $\left\{\begin{array}{l} \mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n) \\ \mathcal{B}' = (e'_1, \dots, e'_n) \end{array}\right.$ deux bases de E.

1. Comme l'application $(u_1,\ \dots,\ u_n) \mapsto \det_{\mathcal{B}'}(\varphi(u_1),\ \dots,\ \varphi(u_n))$ est une forme n-linéaire alternée, on démontre facilement que : $\det_{\mathcal{B}'}(\varphi(u_1), \dots,\ \varphi(u_n)) = \det_{\mathcal{B}'}(\varphi(\mathcal{B}')). \det_{\mathcal{B}'}(u_1, \dots,\ u_n)$.
   Puis (⚠) on applique cette formule à $\mathcal{B} = (e_1, \dots,\ e_n)$.
2. On applique ensuite la formule de changement de base à $\det_{\mathcal{B}'}(\varphi(e_1), \dots,\ \varphi(e_n))$.
3. Il ne reste plus qu'à conclure ...

Remarque 6. Contrairement au déterminant d'un système de vecteurs, on pourra donc parler du *déterminant d'un endomorphisme* sans préciser de base. Pour le calcul de ce déterminant, nous pourrons donc choisir la base qui nous convient le mieux.

`Exemple 4.` $(*)$ On munit l'espace euclidien $\mathbb{R}^2$ de sa base canonique et on considère $E_1 = \mathrm{Vect}((1,\ 1))$.
Déterminer le déterminant de la symétrie orthogonale par rapport à E_1 et de la projection orthogonale sur E_1.

Exercice : 4

$(*)$ Soit $V = \{x \mapsto e^x.P(x) \mid P \in \mathbb{R}_n[X]\}$.

1. Montrer que V est un espace vectoriel dont on déterminera la dimension.

2. Montrer que l'application $D : f \mapsto f'$ est un endomorphisme de V dont on calculera le déterminant.

Théorème 11 : Propriétés du déterminant d'endomorphismes
Soit E de dimension n et considérons deux endomorphismes $(\varphi,\ \psi) \in L(E)^2$.
Alors :

1. $\det(\mathrm{id}_E) = 1_{\mathbb{K}}$
2. $\det(0_E) = 0_{\mathbb{K}}$
3. $\det(\lambda\varphi) = \lambda^n \det(\varphi)$
4. $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \times \det(\psi)$

Preuve 11 :

1. Par définition du déterminant.
2. Evident.
3. Evident.
4. (a) Si ψ n'est pas un automorphisme, alors la démonstration est évidente.
   (b) Sinon, on note $\mathcal{B} = (e_1,\ \ldots,\ e_n)$ et $\mathcal{B}' = (\psi(e_1),\ \ldots,\ \psi(e_n))$ deux bases de E.
   On calcule alors $\det \varphi \circ \psi$ en se plaçant dans la base $\mathcal{B}$, puis en effectuant un changement de base.

Théorème Fondamental 12 : Caractérisation des automorphismes

1. $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{E}) \iff \det(\varphi) \neq 0$
2. Si $\varphi \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$, alors : $\det(\varphi^{-1}) = \dfrac{1}{\det(\varphi)}$

Preuve 12 : Soit $\mathcal{B}$ une base de E.

1. $\varphi \in \mathrm{GL}(E) \iff (\varphi(e_1),\ \ldots,\ \varphi(e_n))$ est une base de $E \iff \det_{\mathcal{B}}(\varphi(e_1),\ \ldots,\ \varphi(e_n)) \neq 0$.
2. Immédiat avec la formule $\det(\varphi \circ \psi) = \det(\varphi) \times \det(\psi)$.

Exercice : 5
$(*)$ Soit E un $\mathbb{R}$-ev de dimension $n \in \mathbb{N}^*$ et $u \in L(E)$ tels que $u^2 = -\mathrm{id}_E$.
Montrer que la dimension de E est paire et que $u \in \mathrm{GL}(\mathbb{E})$.

Remarque 7.

1. L'application $\det : L(E) \mapsto \mathbb{K}$ n'est pas linéaire. En général : $\det(u+v) \neq \det(u) + \det(v)$.
2. Le déterminant est un morphisme de groupes :

$$\det\ :\ \begin{array}{ccc} (\mathrm{GL}(\mathbb{E}), \circ) & \longrightarrow & (\mathbb{R}^\star, \times) \\ u & \mapsto & \det(u) \end{array}$$

4 Déterminant d'une matrice

Définition 6 : Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
Le déterminant de A est le déterminant des vecteurs colonnes de A.

Ainsi : Si $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{pmatrix}$ alors :

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma).a_{\sigma(1)1} \ldots a_{\sigma(n)n} = \begin{vmatrix} a_{11} & \ldots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \ldots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

Remarque 8. Le déterminant d'une matrice A est donc un polynôme en les coefficients de A où chaque coefficient est de degré ≤ 1 au plus.

`Exemple 5.`

(**) Justifiez que $\begin{vmatrix} \lambda & \dots & \lambda \\ 1 & \dots & n \\ \vdots & & \vdots \\ n-1 & \dots & 2n-1 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} \lambda & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n} \\ a_{n,1} & \dots & a_{n,n} & \lambda \end{vmatrix}$ sont des polynômes de $\mathbb{K}_1[X]$ et $\mathbb{K}_n[X]$ en λ.

`Exemple 6.` (**) Soient $A = (a_{ij})$ et $B = ((-1)^{i+j} a_{ij})$, deux matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$. Comparer leurs déterminants ...

Théorème 13 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ avec E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\mathcal{B}$ une base de l'espace E.
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$, telle que $A = \mathrm{Mat}_{\mathcal{B}}\, u$.
On a alors :

$$\det(u) = \det(A)$$

Preuve 13 : Pas de difficulté !

Remarque 9. Ce résultat va nous permettre d'utiliser le principe du parapluie pour transférer aux matrices les résultats démontrés au paragraphe précédent.

Théorème Fondamental 14 : **Propriétés du déterminant d'une matrice**
Soit deux matrices carrées $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
On a les propriétés suivantes :

P1 : A inversible $\iff \det(A) \neq 0$ et dans ce cas $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.

P2 : $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. (et donc a fortiori : $\det(AB) = \det(BA)$)

Preuve 14 : Il suffit de considérer les endomorphismes canoniquement associés à u et v.

`Exemple 7.` (*)

1. Prouver que la matrice suivante est inversible : $A = \begin{pmatrix} 1+i & -1 & 2i \\ i & 0 & 1 \\ 1 & i & 1 \end{pmatrix}$.
2. Un produit de matrices AB peut-il être inversible si l'une des deux matrices ne l'est pas ?
3. Montrer, à l'aide de deux arguments distincts que deux matrices semblables ont le même déterminant.

Exercice : 6

(*) L'objectif est de calculer le déterminant de la matrice : $A = \begin{pmatrix} 1 & 2a+3 & 3a^2+4a \\ 1 & 2b+3 & 3b^2+4b \\ 1 & 2c+3 & 3c^2+4c \end{pmatrix}$ appartenant à $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.

1. Exprimez A comme le produit de 2 matrices de $\mathfrak{M}_3(\mathbb{C})$.
2. En déduire une expression factorisée du déterminant de A.

Exercice : 7

(**) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ et $B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Montrer qu'il existe $\varepsilon > 0$ tel que : $\forall x \in [-\varepsilon,\ \varepsilon],\ A + xB \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

Voici quelques propriétés utiles permettant de simplifier le calcul d'un déterminant :

Théorème 15 : **Manipulations sur les colonnes**
Soient $C_1, \dots, C_n$ des vecteurs de $\mathbb{K}^n$ (n=2 ou 3).

P1 : On ne change pas le déterminant d'une matrice en ajoutant à une colonne une CL des autres colonnes.
$\det(C_1,\ \dots,\ C_i + \sum_{k\neq i} \lambda_k C_k,\ \dots,\ C_n) = \det(C_1,\ \dots,\ C_i,\ \dots,\ C_n)$.

P2 : $\det(C_1,\ \dots,\ \lambda C_i,\ \dots,\ C_n) = \lambda \det(C_1,\ \dots,\ C_i,\ \dots,\ C_n)$.

P3 : $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

P4 : Inverser deux colonnes change le signe du déterminant.

Preuve 15 : C'est un transfert des propriétés connues sur le déterminant d'un système de vecteurs.

`Exemple 8.` $(*)$ Montrer que $\begin{cases} \lambda_1 = 1 \\ \lambda_2 = 1-n \end{cases}$ sont des racines de $\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \lambda \end{vmatrix}$.

`Exemple 9.` $(*)$ Prouver sans le calculer, que le déterminant de la matrice suivante est nul : $A = \begin{pmatrix} 2a & a+b & a+c \\ a+b & 2b & b+c \\ a+c & b+c & 2c \end{pmatrix}$.

Exercice : 8

$(*)$ Soit $A \in \mathfrak{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $A^3 + A = 0$.
Prouver que A n'est pas inversible.

THÉORÈME 16 : $\det(A) = \det({}^tA)$.
Ainsi, les propriétés précédentes citées sur les colonnes de la matrices sont encore vraies sur les lignes.

Preuve 16 :

Remarquons que : $\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{i=1}^{n} a_{i\sigma(i)}$.

$\begin{cases} \text{En posant } j = \sigma(i) \\ \text{et donc } i = \sigma^{-1}(j) \end{cases}$ on a alors : $\det({}^tA) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)j}$.

Or $\varepsilon(\sigma) = \varepsilon(\sigma^{-1})$ donc $\det({}^tA) = \sum_{\sigma^{-1} \in S_n} \varepsilon(\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^{n} a_{\sigma^{-1}(j)j} = \det A$.

Remarque 10. D'après le théorème précédent, les OEL d'un déterminant produit le même effet qu'une OEC.
Vérifions si vous avez compris : Que se passe-t-il si on intervertit deux lignes dans le calcul d'un déterminant ?

`Exemple 10.` $(*)$ Prouver sans le calculer, que le déterminant de la matrice suivante est nul : $A = \begin{pmatrix} 0 & a & b \\ -a & 0 & c \\ -b & -c & 0 \end{pmatrix}$.

Que dire plus généralement des matrices antisymétriques ?

Exercice : 9

$(**)$ Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant ${}^tA = \bar{A}$. Montrer que $\det A \in \mathbb{R}$.

5 Méthodes de calcul du déterminant d'une matrice

La formule qui définit le déterminant d'un système de vecteurs ne permet pas un calcul aisé de celui-ci. Nous allons donc passer en revue une certain nombre de méthodes plus opérationnelles.

5.1 En dimension 2 et 3

Méthodes déjà rencontrées en début d'année ...
Vous pouvez retrouver sans difficulté les formules connues à partir de la définition donnée dans ce chapitre.

5.2 Déterminant d'une matrice triangulaire

THÉORÈME 17 : Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit des éléments diagonaux.

$$\det(A) = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$$

Preuve 17 : On a $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon(\sigma).a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$.
Or, le seul terme non nul de cette somme est $a_{\sigma(1)1} \dots a_{\sigma(n)n}$ où $\sigma(i) = i$ pour tout $i \in \{1, n\}$.

Remarque 11.

1. A fortiori, le déterminant d'une matrice diagonale s'obtient en multipliant les coefficients diagonaux.
2. On retrouve le fait qu'une matrice triangulaire dont les éléments diagonaux sont non nuls est inversible.

5.3 Calcul par blocs

THÉORÈME 18 : Si $\begin{cases} A \text{ est une matrice } p \times p \\ B \text{ une matrice carrée } q \times q \text{ telles que } p + q = n \\ C \text{ une matrice rectangulaire } p \times q \end{cases}$. On a alors :

$$D = \begin{vmatrix} A & C \\ \mathbf{0} & B \end{vmatrix} = \det(A)\det(B)$$

Preuve 18 :

1. Considérons D comme une fonction f des vecteurs colonnes de A (on fixe les autres colonnes).
   On peut sans difficulté affirmer que dans ce cas D est une application de $\mathcal{A}^p(\mathbb{K}^p)$ que l'on notera f.
   Par conséquent, $D = f(A) = \det(A).f(e_1, \dots, e_p)$ où $(e_1, \dots, e_p)$ est la base canonique de $\mathbb{K}^p$.
   Ainsi : $D = \det(A).\begin{vmatrix} I_p & C \\ 0 & B \end{vmatrix}$.
2. On effectue un raisonnement semblable sur le déterminant de la transposée de la matrice $\begin{pmatrix} I_p & C \\ 0 & B \end{pmatrix}$.
3. Ainsi : $D = \det(A).\det(B).\begin{vmatrix} I_p & 0_q \\ {}^tC & I_q \end{vmatrix}$ et comme $\begin{vmatrix} I_p & 0_q \\ {}^tC & I_q \end{vmatrix} = 1$ ...

Remarque 12. Attention, ce résultat ne se généralise pas aux matrices non diagonales par blocs !! Trouvez un contre exemple pour vous en convaincre ...

`Exemple 11.` $(*)$ Calculer le déterminant suivant : $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 2 & \pi & \ln 2 & 17 \\ 3 & 4 & e & \ln 7 & -23 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \pi^2 \\ 0 & 0 & -3 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3 \end{vmatrix}$

Exercice : 10

$(*)$ Soient $A,\ B,\ C \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$. Calculer $D_1 = \begin{vmatrix} O & A \\ B & C \end{vmatrix}$ et $D_2 = \begin{vmatrix} A & B \\ B & A \end{vmatrix}$.

Exercice : 11

$(**)$ Soient A, B, C et D des matrices de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$ qui commutent deux à deux et $M = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$.

1. Calculer $M \times \begin{pmatrix} I_n & -N \\ 0_n & I_n \end{pmatrix}$ pour $N \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
2. Supposons que A est inversible.
   En choisissant N judicieusement, montrer que $\det M = \det(AD - BC)$.

5.4 Développement d'un déterminant par rapport à une ligne (ou une colonne)

Il s'agit d'une méthode assez rapide pour calculer un déterminant, surtout lorsque celui-ci comporte un nombre important de 0.

Définition 7 : **Cofacteurs**
Soit Δ le déterminant d'une matrice $n \times n$.

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. On note m_{ij} le déterminant $(n-1) \times (n-1)$ obtenu en barrant la ième ligne et la jième colonne de Δ. m_{ij} s'appelle le *mineur* relatif à a_{ij}
2. On appelle *cofacteur* de Δ relatif à a_{ij}, le scalaire $\Delta_{ij} = (-1)^{i+j} m_{ij}$

Cofacteur Δ_{ij} d'un déterminant :

Remarque 13. pour se souvenir du coefficient $(-1)^{i+j}$ du cofacteur Δ_{ij}, on place un signe $+$ sur le premier coefficient puis on répartit de façon alternée les signes $+$ et $-$ au niveau des autres coefficients de la matrice.

Théorème 19 : **Développement d'un déterminant par rapport à une ligne-colonne**
Soit un déterminant $n \times n$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

1. Développement par rapport à la jième colonne : $\Delta = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$
2. Développement par rapport à la ième ligne : $\Delta = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\Delta_{ij}$

Preuve 19 : Démontrons ici la formule de développement par rapport à la j^{eme} colonne C_j.

Idée : On décompose C_j en $C_j = \sum_{k=1}^{n} a_{kj}.\begin{pmatrix} 0 \\ : \\ 1 \\ : \\ 0 \end{pmatrix}$, puis on applique la linéarité par rapport à la j^{eme} variable ...

Remarque 14. Pour calculer un déterminant $n \times n$, on dispose donc de la stratégie générale suivante :

1. Retrancher aux colonnes (lignes), un multiple d'une colonne (ligne) choisie afin de faire apparaître des 0 sur la ligne choisie (colonne).
2. Développer le déterminant par rapport à cette ligne (colonne).
3. Recommencer avec le déterminant $(n-1) \times (n-1)$ obtenu, jusqu'à aboutir à un déterminant 3×3 que l'on sait calculer.

Exemple 12. $(*)$ Calculer les deux déterminants suivants : $D = \begin{vmatrix} 2 & 0 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{vmatrix}$ et $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$.

Exemple 13. $(*)$ Calculer le déterminant de la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\left\{ \begin{array}{l} a_{ii} = a \in \mathbb{R} \\ a_{ij} = 1 \quad \text{si } i \neq j \end{array} \right.$.

Exercice : 12

$(*)$ Soient a et c deux réels. Soient $e_1 = (1,\ 1,\ 1)$, $e_2 = (a,\ 0,\ c)$ et $e_3 = (a^2,\ 1,\ c^2)$ trois vecteurs de $\mathbb{R}^3$.
A quelle condition ces 3 vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^3$?

Exercice : 13

$(**)$ Calculer le déterminant de la matrice de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{N})$ de terme général : $a_{ij} = \sup\{i\ ;j\}$

Exercice : 14

$(*)$ Calculer le déterminant de l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{K})$ défini par $f\ :\ M \mapsto {}^tM$.

Théorème 20 : Application au calcul de l'inverse d'une matrice
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
On appelle la *comatrice* de A, la matrice définie par : $\tilde{A} = (\Delta_{ij})_{(i,j)\in\{1;n\}^2}$.
On a alors le résultat suivant : $A.{}^t\tilde{A} = \det A.I_n$
Dans la cas où A est inversible, on a alors : $\boxed{A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}.{}^t\tilde{A}}$

Preuve 20 : Il s'agit de démontrer que :
1. $(A.{}^t\tilde{A})_{ii} = \det A$ Pas de difficulté
2. $(A.{}^t\tilde{A})_{ij} = 0$ pour $i \neq j$ Pour cela on introduira la matrice N_{ij} obtenue en remplaçant la j^{eme} ligne de A par la i^{eme}

Remarque 15. Dans le cas d'une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{K})$ on a alors la formule : $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.

Exemple 14. $(*)$
1. Choisir une matrice inversible 4×4 et en déterminer son inverse par la méthode précédente.
2. Confirmer le résultat obtenu en calculant l'inverse par inversion de système.
3. Comparer l'efficacité des deux méthodes.

Remarque 16. Peut-on exprimer le déterminant de la comatrice $\tilde{A}$ en fonction du déterminant de A ?

Exercice : 15

$(**)$ Montrer que l'inverse d'une matrice triangulaire supérieure inversible est une matrice triangulaire supérieure.

Exercice : 16

$(**)$ Soit $A = (a_{ij}) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{Z})$.
1. Justifier que $\det A \in \mathbb{Z}$
2. Montrer que l'inverse de A existe et est à coefficients entiers si et seulement si $\det A = \pm 1$

5.5 Déterminant de Vandermonde (1737-1796)

Définition 8 : Déterminant de Vandermonde
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
On appelle *déterminant de Vandermonde* d'ordre n, tout déterminant de la forme :

$$V_n = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \dots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \dots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & \dots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \dots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} \quad \text{où} \quad (a_1,\ \dots,\ a_n) \in \mathbb{K}^n$$

PROPOSITION 21 : Soient $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$.

Nous avons la formule suivante : $\begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & \ldots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} \end{vmatrix} = \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

Preuve 21 : Cas où les a_i sont des complexes distincts :

Pour $p \in \{2, \ldots, n\}$ on définit $V_1 = 1$ et $V_p = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{p-1} \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{p-1} \\ 1 & a_3 & \ldots & a_3^{p-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_p & \ldots & a_p^{p-1} \end{vmatrix}$.

1. On s'intéresse $\left\{ \begin{array}{l} \text{au coefficient dominant} \\ \text{aux racines} \end{array} \right.$ de la f° polynomiale définie par $Q(x) = \begin{vmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^p \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^p \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_p & \ldots & a_p^p \\ 1 & x & \ldots & x^p \end{vmatrix}$
2. On en déduit que $V_{p+1} = (a_{p+1} - a_1) \ldots (a_{p+1} - a_p).V_p$, puis que $V_n = \displaystyle\prod_{1 \leq i < j \leq n} (a_j - a_i)$

`Exemple 15.` Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $\{x_1, \ldots, x_n\}$ une famille de scalaires de $\mathbb{K}$ distincts deux à deux.

Montrer que l'application $\begin{array}{rccc} \phi : & \mathbb{K}_{n-1}[X] & \longrightarrow & \mathbb{K}^n \\ & P & \mapsto & (P(x_1), \ldots, P(x_n)) \end{array}$ est une bijection (avec la définition).

Exercice : 17

$(**)$ Soit $(a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{K}^n$ distincts deux à deux.

Prouver en introduisant un polynôme bien choisi que la matrice $\begin{pmatrix} 1 & a_1 & \ldots & a_1^{n-1} \\ 1 & a_2 & \ldots & a_2^{n-1} \\ 1 & a_3 & \ldots & a_3^{n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & a_n & \ldots & a_n^{n-1} \end{pmatrix}$ est inversible.

5.6 Utilisation d'une formule de récurrence

Lorsque la structure d'un déterminant est répétitive, on peut tenter d'exprimer Δ_n en fonction de Δ_{n-1}, Δ_{n-2} ...

Exercice : 18

$(**)$ Calculer $D_n = \begin{vmatrix} 1 & \ldots & 1 \\ \vdots & \ddots & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix}$ en faisant apparaître une relation de récurrence.

Exercice : 19

$(**)$ Trouver une relation de récurrence linéaire d'ordre 2 vérifiée par : $\Delta_n = \begin{vmatrix} a & c & & & \mathbf{0} \\ b & a & c & & \\ & b & \ddots & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & c \\ \mathbf{0} & & & b & a \end{vmatrix}$

En déduire le déterminant Δ_n dans le cas où $a = 2$ et $b = c = 1$.

Exercice : 20

$(**)$ Soient $a \in \mathbb{R}$, $\left\{ \begin{array}{l} X \in \mathfrak{M}_{1n}(\mathbb{R}) \\ Y \in \mathfrak{M}_{n1}(\mathbb{R}) \end{array} \right.$. Prouver que : $\det \begin{pmatrix} I_n & Y \\ X & a \end{pmatrix} = a - XY$

Exercice : 21

$(***)$ Calculer le déterminant d'ordre n suivant : $\Delta_n = \begin{vmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ -1 & \dots & -1 & 0 \end{vmatrix}$.

6 Exercices de TD

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs $\heartsuit$ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs $\heartsuit$ correspond à la difficulté des exercices.

I] Calculs de déterminants

Les différentes étapes permettant le calcul d'un déterminant :

1. On commence par faire apparaître le plus de "0" possibles, en particulier sur une même ligne ou colonne.
2. On effectue alors un développement par rapport à cette ligne ou colonne et on recommence éventuellement le processus
3. Parfois, on tombe sur une relation de récurrence et on se ramène à rechercher l'expression du terme général d'une suite en fonction de n

Quelques trucs utiles :

1. Lorsqu'on cherche l'expression d'un déterminant sous forme factorisée, on peut envisager de faire apparaître un déterminant triangulaire par blocs.
2. Lorsqu'on retrouve les mêmes coefficients sur chaque ligne, on additionne toutes les colonnes à la première colonne pour faire apparaître un même coefficient en colonne 1.
3. Dans certains cas, il peut être utile de se ramener à un déterminant de vecteurs et de simplifier l'expression en utilisant le caractère n-linéaire alterné du déterminant.

Exercice de TD : 1

$(\heartsuit)$ Calculer les déterminants suivants sous forme factorisée :

1. $(*)$ $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2b & b-c-a & 2b \\ a-b-c & 2a & 2a \\ 2c & 2c & c-a-b \end{vmatrix}$ 2. $(*)$ $\Delta_2 = \begin{vmatrix} a & x & x & b \\ x & a & b & x \\ x & b & a & x \\ b & x & x & a \end{vmatrix}$ 3. $(***)$ $\Delta_3 = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ x^3 & x^2 & x & 1 \\ 1 & 2x & 3x^2 & 4x^3 \\ 4x^3 & 3x^2 & 2x & 1 \end{vmatrix}$

Pour Δ_3, on procèdera de façon usuelle en faisant apparaître des facteurs dès que possible.

Exercice de TD : 2

$(\heartsuit\heartsuit)$ Calculer le déterminant des matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{N})$ de terme général : $\begin{cases} a_{ij} = |i-j| \\ b_{ij} = i^j \end{cases}$

Exercice de TD : 3

$(\heartsuit\heartsuit)$ Soit $\lambda,\ a,\ b \in \mathbb{C}$.
Calculer les déterminants suivants :

1. $(*)$ $\Delta = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & \dots & 1 \\ 1 & \lambda & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \dots & 1 & \lambda \end{vmatrix}$ 2. $(**)$ $T_n = \begin{vmatrix} a+b & b & \dots & b \\ a & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & b \\ a & \dots & a & a+b \end{vmatrix}$. 3. $(**)$ $D_n = \begin{vmatrix} 1 & n & n-1 & \dots & 2 \\ 2 & 1 & \ddots & \ddots & 3 \\ \vdots & 2 & \ddots & \ddots & \vdots \\ n-1 & \ddots & \ddots & \ddots & n \\ n & n-1 & \dots & 2 & 1 \end{vmatrix}$.

Aide :

1. *Pour Δ et D_n, vous remarquerez que chaque ligne contient les mêmes éléments.*
2. *Pour T_n, vous pourrez commencer par effectuer les OEC dans l'ordre suivant :*
   $C_n \leftarrow C_n - C_{n-1}$ *puis* $C_{n-1} \leftarrow C_{n-1} - C_{n-2}$ *puis ...et enfin* $C_2 \leftarrow C_2 - C_1$.

Exercice de TD : 4

$(***)$ Calculer le déterminant $\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & a \\ a & x_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a \\ a & \dots & a & x_n \end{vmatrix}$ où $a,\ x_1,\ \dots,\ x_n \in \mathbb{C}$.

Aide : On pensera à faire intervenir le vecteur $u = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ *et les vecteurs de la base canonique de* $\mathbb{R}^n$.

Exercice de TD : 5

$(\heartsuit\heartsuit)$ Calculer le déterminant : $\Delta = \begin{vmatrix} -a_1 & a_1 & & & \mathbf{0} & \\ & -a_2 & a_2 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & \mathbf{0} & & \ddots & \ddots & \\ & & & & -a_{n-1} & a_{n-1} \\ 1 & \dots & & & 1 & 1 \end{vmatrix}$.

Aide : vous pourrez commencer par effectuer les OEC dans l'ordre suivant :
$C_2 \leftarrow C_2 + C_1$ *puis* $C_3 \leftarrow C_3 + C_2$ *puis ...et enfin* $C_n \leftarrow C_n + C_{n-1}$.

Exercice de TD : 6

$(**)$ Soit la matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ définie par : $A = \begin{pmatrix} (x+1) & 1 & \dots & \dots & 1 \\ 2 & (x+2) & 2 & \dots & 2 \\ 3 & 3 & (x+3) & \dots & 3 \\ \vdots & & \ddots & & \vdots \\ n & \dots & & n & (x+n) \end{pmatrix}$.

Déterminez les valeurs de x pour lesquelles cette matrice est inversible.

Aide : pour le calcul du déterminant, vous pourrez remarquer que dans chaque colonne, intervient le vecteur $(1,\ 2\dots,\ n)$.

Exercice de TD : 7

$(\heartsuit\heartsuit)$

Calculer $\Delta_{2n} = \begin{vmatrix} a & & 0 & 0 & & b \\ & \ddots & & & & \\ 0 & & a & b & & 0 \\ 0 & & b & a & & 0 \\ & & & & \ddots & \\ b & & 0 & 0 & & a \end{vmatrix}$ en faisant apparaître une relation de récurrence.

Exercice de TD : 8

$(**)$

1. Déterminer une relation de récurrence vérifiée par $D_n = \begin{vmatrix} \cos\theta & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 1 & 2\cos\theta & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 1 & 2\cos\theta & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \dots & 0 & 1 & 2\cos\theta \end{vmatrix}$.

   En déduire l'expression de D_n en fonction de n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. Soit C_n, obtenu en remplaçant dans D_n le premier coefficient par $2\cos\theta$.
   (a) Déterminer une relation de récurrence vérifiée par C_n.
   (b) Dans le cas où $\theta \neq k.\pi$, prouver que $C_n = \dfrac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta}$.
   (c) Etudier le cas où $\theta = k.\pi$.

Exercice de TD : 9

(♡♡) On souhaite calculer : $\Delta_n = \begin{vmatrix} x_1 & a & \dots & & a \\ b & x_2 & a & & a \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & & \ddots & & a \\ b & \dots & \dots & b & x_n \end{vmatrix}$ où $a,\ b,\ x_1,\ \dots,\ x_n \in \mathbb{C}$ avec $a \neq b$.

1. Considérer $\Delta_n(t)$ le déterminant obtenu en ajoutant t à chacun des coefficients.
2. Prouver que $\Delta_n(t)$ est une fonction affine de t
3. Déterminer cette fonction affine en considérant des valeurs particulières de t
4. En déduire la valeur de Δ_n.

Le cas où $a = b$ est traité dans un exercice précédent.

Exercice de TD : 10

(♡♡) Calculer le déterminant de l'endomorphisme de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ qui a toute matrice M associe la matrice ${}^tM$.

Indication : Utilisez le fait que $\mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ est somme directe des sev des matrices symétriques et des matrices anti-symétriques.

II] Applications des déterminants

On rappelle que :
1. Une matrice carrée est inversible ssi son déterminant est non nul
2. Un système linéaire carré admet une unique solution ssi son déterminant est non nul
3. Une famille de n vecteurs d'un ev de dimension n est une base ssi son déterminant est non nul

Exercice de TD : 11

(∗) Soient les vecteurs $u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $u_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $u_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix}$ de $\mathbb{R}^4$ munis de sa base canonique.

La famille $(u_1,\ u_2,\ u_3,\ u_4)$ est-elle une base de $\mathbb{R}^4$?

Exercice de TD : 12

(∗) Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & m & -1 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelle valeur de m la matrice A est-elle inversible ?
2. Lorsque A est inversible, résoudre le système $A.\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$. En déduire A^{-1}.
3. Lorsque A n'est pas inversible, déterminer une base du noyau et une équation de l'image de l'endomorphisme associé.

Exercice de TD : 13

(♡♡) Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension 3 et $e = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ une base de E.

Soit f l'endomorphisme de E dont la matrice dans la base e est : $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & -3 \\ -2 & 6 & 6 \\ 2 & -2 & -2 \end{pmatrix}$ ou $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Pour quelles valeurs de λ a-t-on $\det(A-\lambda.I_3)=0$?
2. En déduire que A est semblable à une matrice diagonale que l'on déterminera.

III] Divers

Il faut ici en plus connaître les propriétés opératoires du déterminant.
En particulier, on pourra utiliser :

1. la formule de définition du déterminant.
2. le fait que $\det AB = \det BA$ et que $\det AB = \det A \det B$.
3. la formule donnant l'inverse d'une matrice à l'aide de la comatrice.

Exercice de TD : 14

(♡♡) Soit $n \geq 2$ un entier.
Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$ telle que : $\forall M \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{C})$, $\det(A+M) = \det A + \det M$.

1. Montrer que A n'est pas inversible
2. Supposons que $A \neq 0$.
   En considérant un matrice M inversible bien choisie, montrer qu'on arrive à une contradiction.

Exercice de TD : 15

(♡) Soient $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$. Montrer que si $AB=BA$ alors $\det(A^2+B^2) \geq 0$.

Exercice de TD : 16

(∗ ∗ ∗) Pour tout réel x, on pose $D_n(x) = \begin{vmatrix} x & 1 & & & 0 \\ x^2/2! & x & 1 & & \\ x^3/3! & x^2/2! & x & \ddots & \\ \vdots & & \ddots & \ddots & 1 \\ x^n/n! & \dots & \dots & x^2/2! & x \end{vmatrix}$.

1. Dans le cas où les vecteurs colonnes sont bien dérivables, prouver que :
$$(\det(C_1(x),\ \dots,\ C_n(x)))' = \sum_{i=1}^{n} \det(C_1(x),\ \dots,\ C_i'(x),\ \dots,\ C_n(x))$$
   Aide : Vous pourrez pour cela, utiliser la formule du déterminant.
2. Montrer que D_n est une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer $D_n'(x)$.
3. En déduire l'expression de $D_n(x)$

Exercice de TD : 17

(♡♡) Soit n un entier supérieur à 2 et $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{K})$.
On note $\tilde{A}$ la comatrice de A.
On rappelle la caractérisation suivant du rang d'une matrice $M \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{K})$:

$$\mathrm{rg}(M) = r \iff \text{la plus grande matrice extraite inversible est de taille } r \times r$$

1. Etablir que $\begin{cases} \mathrm{rg}\, A = n \quad\ \ \Rightarrow \mathrm{rg}(\tilde{A}) = n & \text{pas de difficulté} \\ \mathrm{rg}\, A = n-1 \Rightarrow \mathrm{rg}(\tilde{A}) = 1 & \text{on introduira les endomorphismes assocées à } A \text{ et } {}^t\tilde{A} \\ \mathrm{rg}\, A \leq n-2 \Rightarrow \mathrm{rg}(\tilde{A}) = 0 & \text{on appliquera la caractérisation précédente} \end{cases}$.
2. Montrer que $\det(\tilde{A}) = (\det A)^{n-1}$.
3. En déduire $\tilde{\tilde{A}}$.