Les séries numériques

Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

12 mai 2018

??????????????????????????????????????

$$1+2+3+4+5+\ldots\ldots\ldots = \frac{-1}{12}$$

??????????????????????????????????????

Voir la vidéo de Mickaël Launay sur YouTube

L'objet de ce chapitre est la définition et l'étude de la convergence de séries numériques.
Dans tout ce chapitre, (u_n) représente une suite numérique à valeurs réelles ou complexes.

1 Convergence d'une série numérique

Définition 1 :
On appelle *suite des sommes partielles* de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de terme général : $s_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$

la suite (s_n) est plus simplement notée $\sum u_n$ et on parle alors de la "*série* $\sum u_n$".

On dira que u_n est le *terme général* de la série $\sum u_n$.

Remarque 1. La série $\sum u_n$ peut aussi être notée $\sum_{n\geq 0} u_n$ ou $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ ou $\sum_{n\geq n_0} u_n$ si u_n n'est défini qu'à partir de n_0.

Définition 2 : Lorsque la série $\sum u_n$ converge vers une limite s, on note :

la *somme* de la série $\sum u_n$	le *reste d'ordre* n de la série $\sum u_n$
$s = \sum_{k=0}^{+\infty} u_n$	$r_n = s - s_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ où $r_n \to 0$

Remarque 2. ⚠ Attention !!

1. Les notations $\sum_{k=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_n$ n'ont de sens que si l'on a prouvé la convergence de la série !
2. La notation $\sum u_n$ représente la série que celle-ci converge ou pas.
3. Il faudra en particulier ne pas confondre les notations $\sum_{k=0}^{+\infty} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Exemple 1. $(*)$ Dans quel cas une série de terme général u_n constant converge-t-elle ?

Exemple 2. $(*)$ La série de terme général $u_n = \dfrac{1}{2^n}$ converge t-elle ? Si oui, déterminer sa somme.

L'essentiel de ce chapitre est consacré à l'étude de la nature d'une série !!

Remarque 3. Nature d'une série :

1. La *nature* d'une série numérique est le fait qu'elle converge ou diverge.
2. Etudier la nature d'une série numérique consiste à étudier la convergence de la suite (s_n).
3. La nature d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.
4. On dira que deux séries sont *de même nature* lorsqu'elles sont toutes les deux convergentes ou toutes les deux divergentes.

Méthode 1 : Etude de la nature d'une série.

On pourra simplement étudier la convergence de la suite (s_n) des sommes partielles.

Remarque 4. Même si cette première méthode peut s'avérer intéressante, nous allons voir dans ce chapitre des méthodes plus effficaces portant simplement sur l'étude du terme général u_n de la série $\sum u_n$ étudiée.

THÉORÈME 1 : **Caractérisation de la propriété "sont de même nature"**
Soit deux séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$.
On a :

$$\sum u_n \text{ et } \sum v_n \text{ sont de même nature} \iff \left(\sum u_n \text{ converge} \iff \sum v_n \text{ converge}\right)$$

Preuve 1 : Immédiat.

Exemple 3. $(*)$ Soit (u_n) et (v_n) deux suites telles que $u_n = v_n + \alpha_n$ avec $\sum \alpha_n$ qui converge.
Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

PROPOSITION 2 : **Caractérisation de la convergence d'une suite complexe**

Soit $(z_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Nous avons alors :

$$\sum z_n \text{ converge} \iff \left\{\begin{array}{l}\sum \mathrm{Re}(z_n)\\ \sum \mathrm{Im}(z_n)\end{array}\right. \textit{convergent} \quad \text{et} \quad \left\{\begin{array}{l}\text{en cas de convergence :}\\ \displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} z_n = \sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{Re}(z_n) + i\sum_{k=0}^{+\infty}\mathrm{Im}(z_n)\end{array}\right.$$

Nous allons voir dans ce chapitre des méthodes permettant d'étudier la nature d'une série $\sum u_n$ en nous intéressant uniquement à son terme général u_n et donc sans avoir a étudier l'expression des sommes partielles qui souvent est complexe et incalculable.

1.1 L'exemple des séries géométriques

Théorème 3 : Soit $q \in \mathbb{C}$.

$$\sum q^n \text{ converge} \iff |q| < 1 \quad \text{et dans ce cas :} \qquad s = \sum_{k=0}^{+\infty} x^k = \frac{1}{1-q}.$$

Preuve 3 : Aucune difficulté !

Exemple 4. $(*)$ Justifier la convergence et calculer la somme des séries : $\displaystyle\sum_{k\geq 10} (\sqrt{2})^{-k}$ et $\displaystyle\sum_{k\geq 1} (\frac{e}{\pi})^k$.

Exercice : 1

$(*)$ Lorsque la série $\sum q^n$ converge, calculer la valeur de son reste r_n.

Exercice : 2

$(*)$ Prouver que les séries $\displaystyle\sum \frac{\cos n}{2^n}$ et $\displaystyle\sum \frac{\sin n}{2^n}$ convergent et déterminer leur somme.

1.2 Condition nécessaire de convergence

Théorème 4 : Pour qu'une série $\sum u_n$ converge, il faut nécessairement que $u_n \mapsto 0$.

Preuve 4 : Il suffit de remarquer que $u_n = s_n - s_{n-1}$.

Remarque 5. Lorsqu'une série ne vérifie pas cette condition nécessaire de convergence, on dit qu'elle *diverge grossièrement*.

Exemple 5. $(*)$ Quelle est la nature des séries suivantes : $\displaystyle\sum \frac{n}{1+n}$ et $\displaystyle\sum (1+\frac{1}{n})^n$?

Remarque 6. ⚠ Cette condition nécessaire (CN) n'est pas suffisante. Considérer pour cela la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}$.

Exercice : 3

$(*)$ Justifier de deux façons différentes que la série $\sum (-1)^n$ diverge.

1.3 Lien entre convergence d'une suite et d'une série télescopique

Théorème 5 : Soit (u_n) une suite réelle.
Alors :

$$(u_n) \text{ et } \sum (u_{n+1} - u_n) \quad \text{sont de même nature}$$

Preuve 5 : Pas de difficulté en calculant la somme partielle de $\sum (u_{n+1} - u_n)$.

Exemple 6. $(*)$ Justifier la convergence de la série $\displaystyle\sum \frac{1}{n(n+1)}$.

1.4 Linéarité de la somme

Théorème 6 : Si $\sum u_n$ et $\sum u'_n$ convergent respectivement vers s et s' alors :

1. la série $\sum (u_n + u'_n)$ converge vers $s + s'$
2. la série $\sum \lambda u_n$ converge vers $\lambda.s$ (où $\lambda \in \mathbb{C}$)

On peut résumer ces propriétés en disant que l'ensemble des séries convergentes est un $\mathbb{K}$-ev.

Preuve 6 : Pas de difficulté en appliquant les théorèmes généraux sur les limites de suites.

Remarque 7. ⚠ Attention :

1. Même si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent vers s et s', il est faux de dire que $\sum u_n.v_n$ converge $s.s'$!!
2. Ce n'est pas parce que $\sum(u_n + u'_n)$ converge que les séries $\left\{ \begin{array}{l} \sum u_n \\ \sum u'_n \end{array} \right.$ convergent.

Trouvez des contre-exemples !

Exemple 7. $(*)$

1. Que dire de :
   - la somme de deux séries divergentes ?
   - Et de la somme d'une série divergente avec une série convergente ?
2. Change-t-on la nature d'une série lorsqu'on ajoute à son terme général le terme général d'une série convergente ?

Nous allons dans la suite du chapitre exclusivement nous intéresser à 2 types de séries :

1. *Les séries à termes positifs*
2. *Les séries absolument convergentes*

Remarque 8. L'étude des séries à terme général u_n de signe non constant sera approfondi et 2-ème année.

2 Séries à termes positifs

Dans cette section, toutes les séries seront à termes REELS positifs à partir d'un certain rang.
On rappelle que les premières valeurs de u_n n'influencent pas la nature de $\sum u_n$.

2.1 Les théorèmes de convergence

Définition 3 : On dit qu'une série $\sum u_n$ est à termes positifs si $\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geq 0$.

Remarque 9. La série est à termes positifs à partir d'un certain rang si : $\exists N \in \mathbb{N}$ tel que $\forall n \geq N, \quad u_n \geq 0$.

Théorème 7 : **Caractérisation de la convergence**

Soit $\sum u_n$ une série à termes positifs (à partir d'un certain rang) et (s_n) la suite des sommes partielles.
On a alors :

$$\sum u_n \text{ converge} \Longleftrightarrow (s_n) \text{ majorée}$$

Preuve 7 :

$\Rightarrow$ Une suite convergente est majorée.

$\Leftarrow$ La suite des sommes partielles d'une série à termes positifs est croissante.
C'est donc une conséquence du théorème de la limite monotone.

Remarque 10. Une série à termes positifs est soit convergente, soit divergente vers $+\infty$.

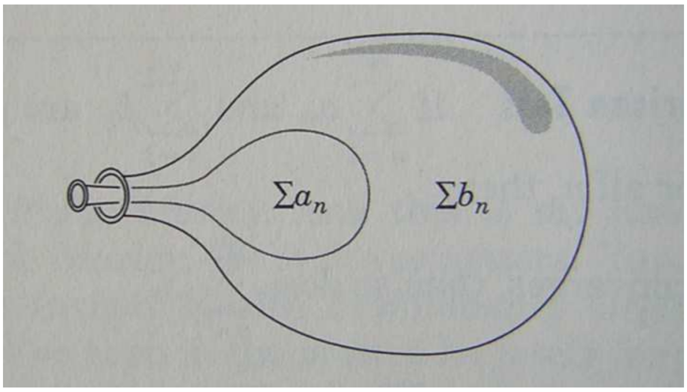

Figure 1 – Théorème des 2 ballons

Corollaire 8 : **Théorème des "deux ballons"**

Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ telles que : $0 \leq u_n \leq v_n$ à partir d'un certain rang.

1. Si $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge et dans ce cas : $\displaystyle\sum_{k=0}^{+\infty} u_n \leq \sum_{k=0}^{+\infty} u_n$
2. Si $\sum u_n$ diverge, alors $\sum v_n$ diverge. (contraposée de la proposition précédente)

Preuve 8 : On utilise le théorème de la limite monotone et le théorème des gendarmes.

Remarque 11. Ainsi, pour étudier la nature d'une série numérique à termes positifs, on peut comparer (soit majorer, soit minorer selon l'objectif) son terme général u_n à celui d'une série dont la nature est connue.

Pour prouver que $0 \leq u_n \leq v_n$ **à partir d'un certain rang (pour des suites positives !)**

Un méthode efficace consiste à étudier la limite de $\dfrac{u_n}{v_n}$.
Si cette limite existe et appartient à $[0,\ 1[$ alors on aura :

$$0 \leq \frac{u_n}{v_n} \leq 1 \quad \text{à partir d'un certain rang} \quad \text{CQFD !}$$

`Exemple 8.` $(*)$ Etudier la convergence des séries de terme général :

1. $u_n = \left(1+\sqrt{n}\right)^{-n}$.
2. $v_n = \dfrac{1}{2^n - 1}$.
3. $w_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}.\ln n}$.

Exercice : 4

$(*)$ Etudier la nature des séries de terme général $u_n = \dfrac{\ln n}{n.2^n}$ et $v_n = \dfrac{n}{\ln n.2^n}$.

Exercice : 5

$(**)$ Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes positifs convergentes.

1. Prouver que $\sum u_n v_n$ est aussi convergente. En déduire que $\sum u_n^2$ est convergente.
2. Prouver que $\sum \max(u_n, v_n)$ et $\sum \sqrt{u_n v_n}$ sont aussi convergentes.

Corollaire 9 : **Critère de convergence utilisant les "O"**

Soit $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes **positifs** à partir d'un certain rang.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} u_n = O(v_n) \\ \sum v_n \text{ convergente} \end{cases}, \quad \text{alors} \quad \sum u_n \text{ converge.}$$

Preuve 9 : Si $u_n = O(v_n)$, alors il existe $M > 0$ tel que $u_n \leq M.v_n$ à partir d'un certain rang.
On applique alors le critère de comparaison.

Remarque 12. Ce théorème est a fortiori vrai lorsque $u_n = o(v_n)$.

Pour prouver que $u_n = O(v_n)$ à partir d'un certain rang (pour des suites positives !)

Un méthode efficace consiste à étudier la limite de $\dfrac{u_n}{v_n}$.
Si cette limite existe et alors $\dfrac{u_n}{v_n}$ sera bornée et l'on aura donc bien $u_n = O(v_n)$.

Exercice : 6

(∗∗) Soient (u_n) et (v_n) à termes strictement positifs telles qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $\forall n \geq N$, $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \leq \dfrac{v_{n+1}}{v_n}$.
Montrer que si la série $\sum v_n$ converge, alors $\sum u_n$ converge.

Aide : on pourra vérifier que u_n/v_n est majorée.

Théorème 10 : **Critère de convergence utilisant les "∼"**

Soient $\sum u_n$ et $\sum u_n$, deux séries telles que $\boxed{u_n \sim v_n}$ avec v_n à termes **positifs** à partir d'un certain rang.

Alors : $\begin{cases} \sum u_n \\ \sum v_n \end{cases}$ sont de même nature

Preuve 10 : Comme $u_n \sim v_n$ et que v_n est positif à partir d'un certain rang, u_n le sera aussi.
Ces deux suites étant équivalentes, on a aussi $u_n = O(v_n)$ et $v_n = O(u_n)$.
D'après le théorème précédent, la convergence de l'une entraîne donc la convergence de l'autre.

`Exemple 9.` (∗) Prouver la convergence de $\sum \dfrac{1}{n^2}$ en étudiant la série $\sum \dfrac{1}{n(n+1)}$

Exercice : 7

(∗∗) Soit (u_n) une suite à termes positifs et $v_n = \frac{u_n}{u_n+1}$.
Montrer que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont de même nature.

Remarque 13. Le critère d'équivalence est plus généralement valable pour toutes les séries à terme général de signe constant à partir d'un certain rang. Lorsqu'une série est à termes négatifs, il suffit en effet d'étudier la série opposée !

2.2 Séries de Riemann

Théorème 11 : Les séries de la forme $\sum \dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha \in \mathbb{R}$ sont appelées des *séries de Riemann.*

$$\sum \frac{1}{n^\alpha} \text{ converge} \iff \alpha > 1$$

Avec les séries géométriques, les séries de Riemann font partie des séries de référence.

Preuve 11 :

1. Cas où $\alpha \leq 0$: la série ne vérifie pas la CN de convergence !
2. Cas où $\alpha > 0$: 2 démonstrations possibles
   - Une démonstration originale qui marche lorsque $\alpha \neq 1$:
     On détermine les conditions de convergence de $\sum \frac{1}{n^\alpha}$ en étudiant la série $\sum(\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha})$.
     On montre que $\frac{1}{n^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \sim \frac{\alpha}{n^{\alpha+1}}$ (DL ou TAF) et on conclut.
   - Pour une démonstration valable dans tous les cas, on pourra utiliser le théorème de la partie "comparaison série - intégrale".

`Exemple 10.` (∗) Soient $a > 0$. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{1}{a^{\ln n}}$.

`Exemple 11.` (∗) Soient $a > 0$ et $\alpha > 0$. Etudier la nature de la série de terme général $u_n = \dfrac{a^n}{n^\alpha}$.

Exercice : 8

(∗∗)

1. Soit $q > 0$. Etudier la nature de la série de terme général $v_n = q^{\sqrt{n}}$.
2. En déduire l'ensemble de définition de la fonction S définie par $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{k}}$.

Corollaire 12 : Soit une série de terme général u_n avec $u_n \sim \dfrac{k}{n^\alpha}$ où $k \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

$$\sum u_n \quad \text{et} \quad \sum \frac{1}{n^\alpha} \quad \text{sont de même nature}$$

Preuve 12 : Immédiat compte-tenu du théorème sur les équivalents du terme général d'une série à terme général positif.

Remarque 14. Peut-on utiliser le critère d'équivalence pour la série de terme général $u_n = \dfrac{(-1)^n}{n^2+1}$?

`Exemple 12.` (∗) Etudiez la convergence des séries de terme général :

1. $u_n = \dfrac{1}{1+2^n}$
2. $v_n = \dfrac{\sqrt{n}}{n+1}$
3. $w_n = e - (1 + \dfrac{1}{n})^n$
4. $x_n = \dfrac{\sqrt{n+1} - \sqrt{n}}{n}$

Exercice : 9

(∗∗) Etudier la convergence de la série $\sum \dfrac{\ln^\alpha n}{n^\beta}$ où $\alpha,\ \beta \in \mathbb{R}^+$.

Exercice : 10

(∗∗) Etudier la nature de la série de terme général u_n vérifiant la relation de récurrence $u_{n+1} = \dfrac{1}{n} e^{-u_n}$.

2.2.1 Méthode d'étude d'une série à termes positifs

Soit $\sum u_n$ avec $u_n \geq 0$.

Etape 1 : On détermine un équivalent de u_n.

- Cela nous permet de vérifier la condition nécessaire de convergence : $u_n \to 0$.
- Cela nous permet également de vérifier que $u_n \geq 0$ à partir d'un certain rang.
- Lorsque $u_n \Longleftrightarrow \alpha_n \geq 0$ alors $\sum u_n$ et $\sum \alpha_n$ sont de même nature.

Etape 2 : Lorsque que la convergence ou la divergence de $\sum \alpha_n$ n'est pas immédiate.

- On conjecture la convergence ou la divergence de $\sum \alpha_n$ en comparant intuitivement α_n à $\frac{1}{n}$.
- Si $\alpha_n \to 0$ "rapidement" :
  On conjecture la convergence de $\sum \alpha_n$ et on cherche v_n tel que $\begin{cases} 0 \leq \alpha_n \leq v_n \text{ à partir de } n_0 \\ \sum v_n \text{ converge} \end{cases}$
- Si $\alpha_n \to 0$ "lentement" :
  On conjecture la divergence de $\sum \alpha_n$ et on cherche $v_n \geq 0$ tel que $\begin{cases} v_n \leq \alpha_n \text{ à partir de } n_0 \\ \sum v_n \text{ diverge} \end{cases}$

Remarque 15. Cette méthode supposent la connaissance de séries de référence dont on connait la convergence ou la divergence. En pratique, on se ramènera donc souvent à la comparaison avec les séries géométriques $\sum q^n$ ou avec les séries de Riemann $\sum \frac{1}{n^\alpha}$.

3 Comparaison Série - Intégrale

Cette méthode ne s'applique que lorsque la série est de la forme $\displaystyle\sum f(n)$ avec f $\begin{cases} \text{continue par morceaux} \\ \text{positive} \\ \text{décroissante} \end{cases}$ sur $[n_0; +\infty[$.

LEMME 13 : **Encadrement par des intégrales**

Soit f une fonction continue par morceaux, **positive et décroissante** sur $[n_0,\ +\infty[$ $(n_0 \in \mathbb{N})$.
Il est alors possible d'étudier la convergence de $\displaystyle\sum f(n)$ en remarquant que :

$$\boxed{\int_{n_0+1}^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{k=n_0+1}^{n} f(k) \leq \int_{n_0}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x}$$

Et en étudiant les limites du majorant et du minorant.

Preuve 13 : L'inégalité provient de l'encadrement de l'intégrale $\displaystyle\int_k^{k+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

Dessin

THÉORÈME 14 : **Comparaison à une intégrale impropre**

Soit f une fonction continue par morceaux, **positive et décroissante** sur $[n_0,\ +\infty[$ $\quad (n_0 \in \mathbb{N}^*)$.
On a alors :

$$\sum f(n) \quad \text{et la suite } (u_n) \text{ de terme général} \quad u_n = \int_{n_0}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{sont de même nature}$$

Preuve 14 : Immédiat d'après le lemme précédent.

`Exemple 13.` ($*$) Etudier la nature des séries de terme général $a_n = \dfrac{1}{n}$, $b_n = \dfrac{1}{n.(\ln n)^2}$ et $c_n = \dfrac{1}{n.\ln n.\ln(\ln n)}$

Recherche d'un équivalent

Dans le cas où la série $\sum u_n$ diverge vers $+\infty$, la comparaison à une intégrale peut permettre de déterminer un équivalent de la somme partielle s_n.

1. On commence par encadrer s_n (ou s_n moins les premiers termes) par deux intégrales.
2. On montre que ces intégrales sont équivalentes à une même suite α_n
3. On en déduit que $s_n \sim \alpha_n$

Remarque 16. C'est en utilisant cette méthode que nous avons prouvé dans un chapitre précédent que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln(n)$.

`Exemple 14.` ($*$) Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série $\sum \dfrac{\ln n}{n}$.

4 Séries absolument convergentes

Dans cette section, les suites peuvent de nouveau être complexes !
On pourra parfois utiliser ces résultats pour étudier la nature de séries dont le terme général change de signe.

Définition 4 : Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.
On dira qu'une série $\sum u_n$ est *absolument convergente* si la série $\sum |u_n|$ converge.

Remarque 17. Une série convergente mais non absolument convergente est dite *semi-convergente*.

Théorème 15 : Toute série absolument convergente est convergente.

Preuve 15 :

- Commençons par montrer ce théorème pour les séries de terme général réel.
  On note $u_n^+ = \max(u_n, 0)$ et $u_n^- = \max(-u_n, 0)$.
  Les séries de terme général u_n^+ et u_n^- sont à termes positifs et vérifient : $u_n^+ \leq |u_n|$ et $u_n^- \leq |u_n|$.
  D'après le critère de comparaison, ces 2 séries convergent. On conclut en remarquant que $u_n = u_n^+ - u_n^-$.
- Extension aux séries complexes :
  Si $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$, alors on se ramène au cas précédent en constatant que $|\operatorname{Re} u_n| \leq |u_n|$ et $|\operatorname{Im} u_n| \leq |u_n|$.

`Exemple 15.` ($*$) Justifier la convergence des séries : $\sum (-1)^n \dfrac{n}{10^n}$, $\sum \dfrac{\cos n}{n^2}$ et $\sum \dfrac{e^{in}}{n^2}$.

Remarque 18. En revanche, comme le montre l'exercice suivant, la convergence n'implique pas l'absolue convergence.

Exercice : 11

($*$) Soit (α_n) la suite de terme général $\alpha_n = \dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$.

1. Vérifier que la série $\sum u_n$ où $u_n = \alpha_{n+1} - \alpha_n$ n'est pas absolument convergente.
2. Montrer cependant que $\sum u_n$ converge.

Remarque 19. L'intérêt de la convergence absolue est qu'on se ramère à l'étude de convergence d'une série à termes positifs. Les méthodes vues dans ce cas ($\leq$, o, O, $\sim$) s'appliquent donc !

Corollaire 16 : **Critère de convergence utilisant les "O"**

Soit $(u_n) \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et (v_n) une suite réelle.

$$\text{Si} \quad \begin{cases} u_n = O(v_n) \\ \sum |v_n| \text{ convergente} \end{cases}, \quad \text{alors} \quad \sum u_n \text{ est absolument convergente.}$$

Preuve 16 : Si $u_n = O(v_n)$, alors il existe $M > 0$ tel que $|u_n| \leq M|v_n|$ à partir d'un certain rang.
On applique alors le critère de comparaison.

Exercice : 12

(**) **Un premier pas vers la formule de Stirling**

On considère ici les suites (v_n) et (w_n) définies par : $v_n = \dfrac{n!}{n^n}e^n$ et $w_n = \dfrac{v_n}{\sqrt{n}}$.

1. Montrer que : $\ln v_{n+1} - \ln v_n = \dfrac{1}{2n} + O(\dfrac{1}{n^2})$.
2. En déduire la nature de la série $\sum(\ln w_{n+1} - \ln w_n)$.
3. Conclure.

5 Représentation décimale des réels

Définition 5 : **Valeurs décimales approchées**

Soit un réel x, et un entier naturel $n \geq 1$. Alors :

$$\boxed{\frac{\lfloor x.10^n \rfloor}{10^n} \leq x < \frac{\lfloor x.10^n \rfloor + 1}{10^n}}$$

On dit que :

1. $\frac{\lfloor x.10^n \rfloor}{10^n}$ est *une valeur décimale approchée de x par défaut* à la précision 10^{-n}.
2. $\frac{\lfloor x.10^n \rfloor+1}{10^n}$ est *une valeur décimale approchée de x par excès* à la précision 10^{-n}.

Preuve 16 : C'est une application immédiate de la partie entière.

Exemple 16.

3.14159 est une valeur décimale approchée par défaut de π à la précision 10^{-5}
3.14160 est une valeur décimale approchée par excès de π à la précision 10^{-5}

Théorème 17 : **Développement décimal d'un réel**

Soit $x \in \mathbb{R}^+$.
Il existe une unique suite $(\alpha_n) \in [\![0, 9]\!]^{\mathbb{N}^*}$ avec $\alpha_0 \in \mathbb{N}$ telle que :

$$x = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{10^k} \quad \text{avec} \quad (\alpha_n) \text{ non stationnaire à } 9$$

La suite (α_n) est alors définie par : $\begin{cases} \alpha_0 = \lfloor x \rfloor \\ \alpha_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10\lfloor 10^{n-1}x \rfloor \end{cases}$.

Preuve 17 : Démonstration non exigible ! Quelques indications cependant :

1. Une analyse montre que si la décomposition existe alors on a a bien :

$$\left\{\begin{array}{l}\alpha_0 = \lfloor x \rfloor \\ \alpha_n = \lfloor 10^n x \rfloor - 10\lfloor 10^{n-1}x \rfloor\end{array}\right. \quad \text{en montrant que} \quad \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{10^k} < 1$$

2. Synthèse :
   (a) On commence par vérifier que $\alpha_n \in [\![1, 9]\!]$ pour $n \geq 1$.
   (b) On vérifie facilement que $\sum_{k=1}^{n} \frac{\alpha_k}{10^k} \to x - \alpha_0$
   (c) On vérifie par l'absurde que (α_n) n'est pas stationnaire à 9.

Remarque 20. La décomposition précédente est appelée le *développement décimal propre de x*.

⚠ Les décimaux admettent deux développements décimaux : $a, a_1 a_2 \dots a_p 00000 \dots = a, a_1 a_2 \dots a_{p-1}(a_p - 1)9999 \dots$

Remarque 21. Ce résultat permet de démontrer que $\mathbb{R}$ n'est pas dénombrable, c'est à dire qu'il n'existe pas de bijection de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$. Pour cela, on suppose qu'une telle bijection existe et on recherche par intuition un nombre réel qui n'admet pas d'antécédent par cette application. On peut visualiser la construction de x à l'aide d'un tableau faisant apparaître la *diagonale de Cantor*.

PROPOSITION 18 : Caractérisation des nombres rationnels

Soit $x \in \mathbb{R}$. On a alors : $\boxed{x \in \mathbb{Q} \iff x \text{ admet un développement décimal périodique}}$.

Preuve 18 : Là encore, la démonstration n'est pas exigible...
On procède par double implication :

$\Rightarrow$ Soit $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q}$.
On peut se contenter d'un raisonnement rapide qui consiste à constater que la suite des restes de la DE de a par b est périodique à partir d'un certain rang.
Sinon plus rigoureusement, on note $x = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\alpha_k}{10^k}$ le développement décimal de x.
On introduit alors la suite d'entiers (q_n) telle que si $q_0 = a$ alors $\alpha_n = \lfloor \frac{q_n}{b} \rfloor$ et $q_{n+1} = 10(q_n - \alpha_n b)$.
On vérifie facilement que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $q_n \in [\![0, 10b]\!]$. Ainsi, il existe $r < s$ tels que $q_r = q_s$.
On en déduit alors que le développement de x est périodique de période $T = s - r$ à partir de α_r.

$\Leftarrow$ Il s'agit de calculer x en tenant compte du fait que le développement est périodique.

`Exemple 17.` Le nombre $x = 1,20200200020000200000 2...$ (le nombre de "0" augmente de 1 après chaque 2) est-il rationnel ?

Exercice : 13

$(*)$ Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}^*$ tels que $a \wedge b = 1$. Montrer que :

$$\frac{a}{b} \text{ admet un développement décimal fini} \iff b = 2^i.5^j \quad \text{avec } i,\ j \in \mathbb{N}$$

6 Calcul approché de la somme d'une série à termes positifs

Il est possible de calculer la somme d'une série numérique dans quelques cas particuliers :

- série de terme général géométrique,
- série télescopiques,
- série dont le terme général est $\frac{(b-a)^n}{n!} f^{(n)}(a)$.
- somme de Riemann dans le cours sur l'intégration (attention : ce n'est pas une série ! !)

Lorsqu'on ne dispose pas de méthode pour calculer la valeur exacte de cette somme, nous pouvons envisager d'en calculer une approximation.

Le principe consiste à choisir une erreur $\varepsilon > 0$ et à déterminer un rang n à partir duquel on est sûr que $|s - s_n| \leq \varepsilon$, c'est à dire $|r_n| < \varepsilon$. On choisira alors s_n comme valeur approchée de la somme s à ε près.

LEMME 19 : Lorsque la série $\sum u_n$ est convergente, alors : $t_N = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} u_k \xrightarrow[N\to+\infty]{} r_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Preuve 19 : En effet : $t_N = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} u_k = s_N - s_n \xrightarrow[N\to+\infty]{} s - s_n = r_n$.

De façon générale, la méthode pour obtenir une approximation consiste à majorer précisément le reste r_n par une expression simple fonction de n. Pour cela, on procède en général ainsi :

Méthode de majoration du reste de la série $\sum u_n$:

Pour n fixé, on considère la suite de terme général : $t_N = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} u_k$.

1. On a : $|t_N| = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{N} u_k$.
2. On majore alors les u_k par v_k dont on peut calculer ou majorer la somme de la série.
   On prendra souvent v_k de la forme $v_k = q^k$ ou $v_k = \frac{1}{k^\alpha}$).
3. On fait alors tendre $N \to +\infty$.
4. On obtient ainsi par passage à la limite un majorant du reste $|r_n|$.
5. On peut alors trouver les valeurs de n telles que $|r_n| \leq \varepsilon$, c'est à dire telles que $s_n \approx \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ à ε près.

Remarque 22. Plus généralement, la méthode de majoration du reste pourra s'appliquer lorsque $u_n \leq f(n)$ avec f une fonction positive, décroissante et continue sur un intervalle de la forme $[n_0,\ +\infty[$ avec $\int_n^N f(t)\,\mathrm{d}t$ calculable.

Exercice : 14

($*$) Trouver un majorant de $r_n = \displaystyle\sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$ à termes positifs lorsque :

1. u_n est majoré par q^n avec $0 < q < 1$.
2. u_n est majoré par $\dfrac{1}{n^\alpha}$ avec $\alpha > 1$

Exercice : 15

($**$) **Etude d'une situation particulière** :

On suppose ici que $\sum u_n$ est une série à termes strictement positifs et que l'on a pour tout $n \geq n_0$:

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} \leq \lambda \in [0,\ 1[$$

1. Justifier la convergence de la série $\sum u_n$.
2. Montrer alors que pour tout $n \geq n_0$, on a : $0 \leq r_n \leq \frac{\lambda}{1-\lambda} u_n$

6.1 Exemple 1 : Majoration du reste par le reste d'une série géométrique

Il est parfois possible de majorer la série étudiée par une série géométrique convergente. Dans ce cas, nous pouvons facilement obtenir une majoration du reste.

`Exemple 18.` $(*)$ Soit $\sum \frac{1}{2^n-1}$.

1. Prouver la convergence de la série.
2. Déterminer une approximation à 10^{-3} de sa somme.

`Exemple 19.` $(*)$ Soit $\sum \frac{n}{10^n}$.

1. Prouver la convergence de la série.
2. Montrer que pour $n \geq 9$, on a $r_n \leq \frac{9}{8}.\frac{n+1}{10^{n+1}}$.

6.2 Exemple 2 : Majoration du reste par le reste d'une série de Riemann

Il est parfois possible de majorer la série étudiée par une série de Riemann convergente. Dans ce cas, nous pouvons aussi facilement obtenir une majoration du reste.

`Exemple 20.` $(*)$ **Série comparable à une série de Riemann**

1. Déterminer une approximation à 10^{-3} près de la somme de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n^2+1}$.
2. Donner une estimation de l'erreur commise lorsqu'on approche $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ par $\displaystyle\sum_{n=1}^{100} \frac{1}{n^2}$.

6.3 Cas des séries $\sum f(n)$ avec f positive et décroissante

On considère ici, f une fonction réelle continue par morceaux sur $[n_0,\ +\infty[$ $(n_0 \in \mathbb{N})$, positive et décroissante.

1. **Cas où la série $\sum f(n)$ est convergente** : majoration du reste

   En procédant de la façon suivante, on peut alors déterminer une majoration du reste r_n.

   Puisque $\sum f(n)$ est convergente, la suite de terme général $I_n = \int_a^n f(x)\,\mathrm{d}x$ est elle aussi convergente. Notons I sa limite.

   L'encadrement de $f(k)$ par des intégrales nous permet d'affirmer que pour tout $a \leq n \leq N$:

   $$\boxed{\left|\sum_{k=n+1}^{N} f(k)\right| \leq \int_n^N f(x)\,\mathrm{d}x}$$

   Ainsi, en faisant tendre $N \to +\infty$, on obtient un majorant de $|r_n|$

   Cet encadrement nous donne une idée de l'erreur commise en approchant la somme d'une série par une somme partielle s_n. Dans certains cas, on peut également en déduire un équivalent de r_n.

   `Exemple 21.` $(*)$ Déterminer un équivalent du reste de la série $\sum \frac{1}{n.\ln^2 n}$

2. **Cas où la série $\sum f(n)$ est divergente :** Etude de la vitesse de divergence

   On considère ici f continue sur $[n_0,\ +\infty[$ et décroissante vers 0.
   L'encadrement de $f(k)$ par des intégrales nous permet d'affirmer que pour tout $n_0 + 1 \leq a \leq n$:

   $$\int_a^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(n) \leq \sum_{k=a}^{n} f(k) \leq \int_a^n f(x)\,\mathrm{d}x + f(a) \qquad \text{avec} \qquad f(n) \to 0$$

   On cherche alors un équivalent α_n de $\int_a^n f(x)\,\mathrm{d}x$ et on obtient alors :

   $$\boxed{s_n \sim \int_a^n f(x)\,\mathrm{d}x \sim \alpha_n}$$

`Exemple 22.` $(*)$ Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série $\sum \frac{1}{n.\ln n}$.

7 Exercices de TD

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs $\heartsuit$ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs $\heartsuit$ correspond à la difficulté des exercices.

I] Etude de la nature d'une série

Lorsqu'une série est à terme général positif (au moins à partir d'un certain rang), on peut facilement déterminer sa nature par comparaison à des séries dont on connaît la convergence ou la divergence (series de Riemann et séries géométriques). On pourra pour cela, rechercher un équivalent ou procéder par majoration (pour la convergence) ou minoration (pour la divergence).

Exercice de TD : 1

$(\heartsuit)$ En utilisant les techniques vues en cours, étudier la nature des séries de terme général :

1. $(*)$ $u_n = \ln(\frac{n^2-n-1}{n^2+n-1})$
2. $(*)$ $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
3. $(**)$ $u_n = n^{-\cos\frac{1}{n}}$
4. $(**)$ $u_n = n^{\frac{1}{n}} - (n+1)^{\frac{1}{n}}$
5. $(**)$ $u_n = \frac{\ln n}{2^n}$
6. $(*)$ $u_n = \sqrt{\frac{n+1}{n}}$
7. $(**)$ $u_n = \frac{1}{n\ln^2 n}$
8. $(**)$ $u_n = \ln(1-e^{\frac{1}{n}})$
9. $(**)$ $u_n = \ln(1-e^{\frac{1}{n}}) - \ln(1-\frac{1}{n})$

Je vous conseille fortement de traiter tous les exemples car ils font appel en général à des techniques différentes.

Exercice de TD : 2

$(\heartsuit\heartsuit)$ Soient $a,\ b,\ \alpha \in \mathbb{R}$.
Etudier selon les valeurs de a, b et α la nature des séries $\sum u_n$ suivantes :

1. $u_n = \left(\frac{n+1}{n+3}\right)^{n^a}$
2. $u_n = \left(\cos\frac{1}{n}\right)^{n^a}$
3. $u_n = \sqrt{n} + a\sqrt{n+1} + b\sqrt{n+2}$
4. $u_n = \ln n + a\ln(n+1) + b\ln(n+2)$

II] Comparaison à une intégrale

Lorsque le terme général d'une série à termes positifs est de la forme $f(n)$ avec f décroissante, on peut envisager encadrer la somme partielle ou le reste d'une série convergente par des intégrales. Cela permet :

1. soit de prouver la convergence ou la divergence d'une série
2. soit de déterminer un équivalent de la somme partielle ou du reste partiel
3. soit de majorer le reste partiel afin de rechercher une valeur approchée de la somme de la série

Exercice de TD : 3

$(\heartsuit)$ Soit $\alpha > 0$ et $\beta > 0$. On pose pour tout entier naturel n non nul $S_n(\alpha) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^\alpha}$

1. Lorsque $\alpha \leq 1$, déterminer un équivalent de $S_n(\alpha)$.
2. En déduire la nature de la série de terme général $u_n = \frac{S_n(\alpha)}{S_n(\beta)}$

Exercice de TD : 4

$(**)$ Soit la fonction S définie par $S(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{+\infty} e^{-x\sqrt{k}}$.

1. Montrer que S est définie sur $]0;+\infty[$

2. Prouver que pour tout $x \in]0;\ +\infty[$, on a : $\frac{2}{x^2}e^{-x}(x+1) \leq S(x) \leq \frac{2}{x^2}$.
On pourra penser à encadrer $S(x)$ par deux intégrales que l'on calculera.
3. En déduire que $S(x) \sim \frac{2}{x^2}$ au voisinage de 0.

Exercice de TD : 5

(♡♡)

1. Déterminer un équivalent de la somme partielle de la série $\sum \frac{1}{n.\ln n}$.
2. Déterminer un équivalent du reste de la série $\sum \frac{1}{n.\ln^2 n}$.

Exercice de TD : 6

($***$) On considère la série $\sum \frac{1}{n^2+1}$ et on note r_n son reste d'ordre n, s_n sa somme partielle d'ordre n et s sa somme.

1. Préliminaire :
Montrer que si $\left\{\begin{array}{l} a_n \sim b_n > 0 \\ \sum an \text{ converge}\end{array}\right.$ alors $\displaystyle\sum_{k=n+1} a_k \sim \sum_{k=n+1} b_k$.
2. Montrer que $r_n \sim \frac{1}{n}$.
3. On pose $u_n = \frac{1}{n} - r_n$.
   (a) Montrer que $u_{n+1} - u_n \sim -\frac{1}{n^3}$.
   (b) En déduire que $u_n \sim \frac{1}{2n^2}$ et donc que $s_n = s - \frac{1}{n} + \frac{1}{2n^2} + o(\frac{1}{n^2})$.

III] Calcul et approximation de sommes

Le calcul de la somme d'une série convergente peut se faire :

- A l'aide d'une somme télescopique
- A l'aide d'un encadrement précis de la somme partielle de la série
- A l'aide d'une décomposition en séries dont on connaît les sommes
- A l'aide de formules spécifiques

Exercice de TD : 7

($**$) Soit $x \in]0,\ \frac{\pi}{2}[$. Montrer que $\sum \ln(\cos(\dfrac{x}{2^n}))$ converge et calculer sa somme.
On pourra utiliser la formule $\sin 2a = 2\sin a \cos a$

Exercice de TD : 8

(♡♡) Soit $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer $K(p)$ tel que pour tout $n \geq p$: $\frac{1}{\binom{n}{p-1}} - \frac{1}{\binom{n-1}{p-1}} = \frac{K(p)}{\binom{n}{p}}$.
2. En déduire la convergence et la somme de la série $\displaystyle\sum_{n\geq p} \frac{1}{\binom{n}{p}}$.

Exercice de TD : 9

($**$) Déterminer la somme des séries suivantes : $\displaystyle\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n(n+1)(n+2)}$ et $\displaystyle\sum_{n\geq 0} \arctan\left(\frac{2n}{n^4+n^2+2}\right)$.
Pour la deuxième somme, vous pourrez appliquer la formule suivante : $\arctan x - \arctan y = \arctan \frac{x-y}{1+xy}$.

Exercice de TD : 10

(♡♡) On souhaite prouver la convergence de la série $\sum \dfrac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+3)}$ et déterminer la valeur de sa somme.

1. Décomposer $\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}$ en éléments simples
2. En remarquant que $\displaystyle\int_0^1 x^p \, \mathrm{d}x = \frac{1}{p+1}$, prouver que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(2k+1)(2k+3)} = \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{1-x^2}{1+x^2}(-x)^{n+1}\,\mathrm{d}x$
3. En déduire la somme de la série.

Exercice de TD : 11

($\heartsuit$) Donner une approximation à 10^{-5} près de la somme de la série $\sum \frac{1}{n2^n}$.

Exercice de TD : 12

($\heartsuit$) Soit la série $\sum \frac{n}{10^n}$.

1. Justifier la convergence de cette série.
2. Majorer le reste partiel r_n en remarquant que $\frac{n}{10^n} \leq \frac{1}{9^n}$ à partir d'un rang à déterminer.
3. Majorer le reste partiel r_n avec une intégrale en remarquant que $\frac{n}{10^n} = f(n)$ avec $f(x) = \frac{x}{10^x}$.
4. Montrer que le reste partiel r_n vaut $r_n = \frac{9n+10}{9^2.10^n}$.
   Pour cela, vous remarquerez que $\sum kx^{k-1} = (\sum x^k)'$ (abus de notation).

IV] Divers

1. Montrer que deux séries sont de même nature revient à prouver tour à tour que si l'une converge alors l'autre aussi.
2. Si une série converge alors son terme général tend vers 0.

Exercice de TD : 13

($\heartsuit\heartsuit$)

1. Montrer la convergence de la série de terme général $u_n = \frac{1}{n} + \ln \frac{n-1}{n}$.
2. En déduire qu'il existe une constante γ telle que $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \ln n + \gamma + o(1)$.

Exercice de TD : 14

($\heartsuit\heartsuit$) **Règle de Raabe-Duhamel et formule de Stirling**

Soit (u_n) une suite à termes positifs telle que $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$.

1. Supposons que $\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1 - \frac{\alpha}{n} + O(\frac{1}{n^2})$.
   On souhaite alors montrer qu'il existe $k > 0$ tel que $u_n \sim \frac{k}{n^\alpha}$.
   Pour cela, considérons $x_n = \ln(n^\alpha.u_n)$.
   (a) Montrer que (x_n) a la même nature que la série $\sum(x_{n+1} - x_n)$.
   En déduire que (x_n) converge.
   (b) Conclure
2. Application : Soit $u_n = \dfrac{n!e^n}{n^n}$.
   (a) Quelle est la nature de la série de terme général u_n.
   (b) Notons $k > 0$ tel que $u_n \sim k.\sqrt{n}$.
   Simplifier $\dfrac{u_n^2}{u_{2n}}$ et grâce à la formule de wallis $(\dfrac{(2^n.n!)^2}{(2n)!\sqrt{2n}} \sim \sqrt{\dfrac{\pi}{2}})$ en déduire que $k = \sqrt{2\pi}$.
   (c) Montrer alors la formule de Stirling : $n! \sim \left(\dfrac{n}{e}\right)^n.\sqrt{2\pi n}$.

Exercice de TD : 15

($\heartsuit\heartsuit$) Soit (u_n) une suite à termes positifs. Montrer que $\sum \ln(1 + u_n)$ et $\sum u_n$ sont de même nature.

Exercice de TD : 16

($* * *$) Soit (u_n) une suite à termes positifs et $v_n = \frac{u_n}{(1+u_0)\dots(1+u_n)}$

1. Montrer que $\sum v_n$ converge et que $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} v_n \leq 1$.

   Aide : on pourra commencer par montrer que $v_n = \frac{1}{\alpha_{n-1}} - \frac{1}{\alpha_n}$ où $\alpha_n = \displaystyle\prod_{k=0}^{n}(1 + u_k)$.

2. Prouver que $\sum_{n=0}^{+\infty} v_n = 1$ si et seulement si $\sum u_n$ diverge.

Exercice de TD : 17

$(**)$ **Théorème de sommation des équivalents.**

Soit (u_n) et (v_n) deux suites équivalentes à termes strictement positifs telles que $\sum u_n$ et $\sum v_n$ divergent.

1. **Théorème :** Montrer que les sommes partielles de ces deux séries sont équivalentes
   On pourra utiliser la définition avec ε de la limite.

2. **Application :**
   (a) Montrer que $\ln(n+1) - \ln n \sim \frac{1}{n}$.
   (b) En déduire que $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n$

3. **Complément :**
   Lorsque $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent, montrer que les restes de ces deux séries sont équivalents