Espaces Préhilbertiens Réels

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

18 mai 2018

$$\boxed{g_{n+1} = e_{n+1} - \sum_{i=1}^{n} \langle e_{n+1}, \varepsilon_i \rangle . \varepsilon_i \quad \text{puis} \quad \varepsilon_{n+1} = \frac{g_{n+1}}{\|g_{n+1}\|}}$$

Formule de Gramm-Schmidt

Dans ce chapitre, E désigne un $\boxed{\mathbb{R} \text{ espace vectoriel}}$.

1 Produit scalaire

1.1 Définition d'un produit scalaire

Définition 1 : **Forme bilinéaire symétrique (FBS)**

On appelle *forme bilinéaire symétrique* sur E, une application $\phi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,\ y) & \mapsto & \phi(x,\ y) \end{array}$ vérifiant :

1. ϕ est *bilinéaire* : $\forall (x,\ y,\ z) \in E^3$ et $\forall (\lambda,\ \mu) \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{array}{lll} \phi(\lambda x + \mu y,\ z) = \lambda \phi(x,\ z) + \mu \phi(y,\ z) & \text{en particulier} & \phi(0,\ z) = 0 \\ \phi(x,\ \lambda y + \mu z) = \lambda \phi(x,\ y) + \mu \phi(x,\ z) & \text{en particulier} & \phi(x,\ 0) = 0 \end{array}$$

2. ϕ est *symétrique* : $\forall (x,\ y) \in E^2, \quad \phi(x,\ y) = \phi(y,\ x)$

Remarque 1.

1. L'ensemble des formes bilinéaires symétriques sur E est noté $\mathcal{S}_2(E)$.
2. Pour montrer qu'une application de $E \times E$ dans $\mathbb{R}$ est une forme bilinéaire symétrique, il suffit de commencer par prouver qu'elle est symétrique puis qu'elle est linéaire par rapport à l'une des variables.
3. $\mathcal{S}_2(E)$ est un sev de $\mathcal{F}(E \times E,\ \mathbb{R})$.

`Exemple 1.` L'application déterminant sur $\mathbb{R}^2$ est une forme bilinéaire ANTI-symétrique.

Exercice : 1

$(*)$ Soit $\varphi \in \mathcal{F}(E^2,\ \mathbb{R})$, e une base de l'espace E et X et Y les matrices dans e de $x \in E$ et $y \in E$.

1. Montrer que : φ est une forme bilinéaire $\iff \exists A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\forall x,\ y \in E,\ \varphi(x,y) = {}^t XAY$.

2. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{S}_2(E)$ alors on a de plus que φ est symétrique ssi A est symétrique.

`Exemple 2.` ($*$) Déterminer l'expression de la FBS de $\mathbb{R}^2$ usuel définie par $\varphi(x,\ y) = {}^t XAY$ où $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.

Définition 2 : **produit scalaire**

On appelle *produit scalaire* sur E, une FBS $\phi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,\ y) & \mapsto & \phi(x,\ y) \end{array}$ vérifiant :

1. ϕ est *définie* : $\forall x \in E, \quad \phi(x,\ x) = 0 \Longleftrightarrow x = 0$

2. ϕ est *positive* : $\forall x \in E, \quad \phi(x,\ x) \geq 0$

Remarque 2. Le produit scalaire de deux vecteurs sera souvent noté : $\phi(x,\ y) = \langle x, y\rangle$ ou $< x|y >$ ou encore $x.y$

`Exemple 3.` ($*$) La forme bilinéaire de l'exemple précédent est-elle définie et positive ?

Définition 3 : **Espace Préhilbertien et Espace Euclidien**
Si un $\mathbb{R}$-ev E est muni d'un produit scalaire, on dit alors que E est un *espace préhilbertien réel.*
Si de plus, E est de dimension finie, on dit que E est un *espace euclidien.*

Remarque 3. Un sev F d'un espace préhilbertien réel E est lui aussi considéré comme un espace préhilbertien réel muni du produit scalaire de E.

`Exemple 4.` ($*$) Quelques produits scalaires couramment rencontrés :

1) **Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$:** $\forall \ X,\ Y \in \mathbb{R}^n$: $\langle X, Y\rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = {}^t XY$

2) **Le produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a,\ b],\ \mathbb{R})$:** $\forall \ f,\ g \in \mathcal{C}([a,\ b],\ \mathbb{R})$: $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_a^b f(t)g(t)dt$

3) **Le produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}_T(\mathbb{R})$:** $\forall \ f,\ g \in \mathcal{C}_T(\mathbb{R})$: $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T f(t)g(t)\ \mathrm{d}t$

4) **Un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$:** $\forall \ P,\ Q \in \mathbb{R}[X]$: $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 P(t)Q(t)\ \mathrm{d}t$

5) **Le produit scalaire usuel sur $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$:** $\forall \ A,\ B \in \mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$: $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^t AB)$

Exercice : 2

($*$) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $\varphi(P,\ Q) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} P(k).Q(k)$ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice : 3

($*$) Soient $A,\ B \in \mathfrak{M}_{n,p}(\mathbb{R})$. Montrer que :

1. $\forall X \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$: $AX = BX \quad \Rightarrow \quad A = B$
2. $\forall X \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R}),\ \forall Y \in \mathfrak{M}_{p,1}(\mathbb{R})$: ${}^t XAY = {}^t XBY \quad \Rightarrow \quad A = B$

1.2 Normes et distances

Définition 4 : **Norme sur E**

L'application $\|.\| : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ x & \mapsto & \|x\| \end{array}$ est une norme sur E ssi elle vérifie les 3 propriétés suivantes :

1)	$\forall (x,\ y) \in E \times E$	$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$	Inégalité triangulaire (ou de Minkowsky)
2)	$\forall x \in E,\ \forall \lambda \in \mathbb{R}$	$\|\lambda.x\| = \lvert\lambda\rvert.\|x\|$	Homogénéïté
3)	$\forall x \in E$	$\|x\| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$	Séparation

Remarque 4. Un $\mathbb{K}$-espace vectoriel muni d'une norme est appelé un $\mathbb{K}$-*ev normé*. Voir le cours de Math Spé ...

`Exemple 5.` Sur $\mathbb{R}^n$, on définit pour tout $p \in \mathbb{N}^*$ la *norme* p par la formule $||(x_1,\ \ldots,\ x_n)||_p = \sqrt[p]{|x_1|^p + \cdots + |x_n|^p}$.
En donnant des valeurs particulières à p (1, 2 et $+\infty$ (!!)), on obtient les normes couramment utilisées sur $\mathbb{R}^n$:

$$\left\{\begin{array}{l} \|(x_1,\ \ldots,\ x_n)\|_1 = |x_1| + \cdots + |x_n| \\ \|(x_1,\ \ldots,\ x_n)\|_2 = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2} \\ \|(x_1,\ \ldots,\ x_n)\|_\infty = \max\limits_{i \in [\![1,n]\!]}(|x_1|,\ \ldots,\ |x_n|) \end{array}\right.$$

Exercice : 4

(∗∗) Soit $\|.\|$ la norme 2 sur $\mathbb{R}^n$.
En admettant son existence, montrer que l'application $A \mapsto \sup\limits_{X \neq 0,\ \in \mathfrak{M}_{n,1}(\mathbb{R})} \dfrac{\|AX\|}{\|X\|}$ est une norme sur $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Prouver que cette norme vérifie $\|AB\| \leq \|A\|\|B\|$ pour tout $A,\ B \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

Remarque 5.

1. Il est possible de définir une infinité de normes différentes sur un $\mathbb{R}$-ev E.
   L'expression "Soit un vecteur x de norme 1" n'a donc de sens que s'il n'y a pas d'ambiguïté sur la norme utilisée.
2. Un vecteur de norme 1 est appelé un *vecteur unitaire*. On dit alors qu'il est *normé*.
   Normer un vecteur non nul consiste à diviser ce vecteur par sa norme. On obtient ainsi un vecteur de norme 1.

Définition 5 : **Distance dans un espace vectoriel normé** E
Soit $\|.\|$ une norme sur E.

L'application $d\ :\ \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ (x,\ y) & \mapsto & \|x-y\| \end{array}$ est appelée *distance* sur E associée à la norme $\|.\|$.

On dit que $d(x,\ y)$ est la *distance* entre x et y.

Théorème 1 : **Norme euclidienne**
Soit $\langle .,. \rangle$ un produit scalaire sur E. L'application :

$$\boxed{\|.\|\ :\ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \sqrt{\langle x, x\rangle} \end{array}}$$ définit une norme sur E

Une norme ainsi associée à un produit scalaire est appelée une *norme euclidienne*.

Preuve 1 : On utilise l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour prouver l'inégalité triangulaire (voir plus loin).

Remarque 6. Dans ce cours, nous nous limiterons à l'utilisation de normes euclidiennes.

`Exemple 6.` Norme euclidienne associée au :

produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$	produit scalaire usuel sur $\mathcal{C}([a,\ b],\ \mathbb{R})$	produit scalaire usuel sur $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$
$\|X\| = \sqrt{\displaystyle\sum_{i=1}^n x_i^2} = \sqrt{{}^tXX}$	$\|f\| = \sqrt{\displaystyle\int_a^b f^2(t)dt}$	$\|A\| = \sqrt{\mathrm{Tr}({}^tAA)}$

`Exemple 7.` (∗) Une nouvelle géométrie.

1. Dans $\mathcal{C}([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_0^1 f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$, déterminer laquelle des deux fonctions définies par $u(x) = x$ et $v(x) = 1 + x$ est la plus proche de la fonction exponentielle.
2. Déterminer un triangle équilatéral de l'espace euclidien $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire $\langle A, B\rangle = \mathrm{Tr}({}^tAB)$.

Théorème 2 : **Calculs sur les normes euclidiennes**
Soit $\|.\|$ une norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle .,.\rangle$ sur E.
Pour tout couple de vecteurs $(x,\ y) \in E^2$, et tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$:

1. $\|\lambda.x\| = |\lambda|\|x\|$
2. $\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$ et donc $\|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2\langle x,y\rangle + \|y\|^2$
3. $\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2(\|x\|^2 + \|y\|^2)$ *(égalité du parallélogramme)*

Preuve 2 : Pas de difficulté !!

Egalité du parallèlogramme

Remarque 7. Dans les calculs faisant intervenir $\|x+y\|$, on pensera à élever au carré afin d'utiliser l'égalité précédente.

Corollaire 3 : **Identités de polarisation**
Soit $\|.\|$ une norme euclidienne associée au produit scalaire $\langle .,.\rangle$ sur E.
Pour tout couple de vecteurs $(x,\ y) \in E^2$, et tout réel $\lambda \in \mathbb{R}$,

1. $\langle x,y\rangle = \frac{1}{2}(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2)$
2. $\langle x,y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2\right)$

Preuve 3 : Pas de difficulté !!

Remarque 8.

1. Ces identités permettent de retrouver l'expression d'un produit scalaire connaissant la norme euclidienne associée.
2. Elles permettent aussi de vérifier si une norme est une norme euclidienne ou pas.

1.3 Cauchy-Schwarz

Théorème 4 : **Inégalité de Cauchy-Schwarz**
Soit E un espace préhilbertien muni d'un produit scalaire $\langle .,.\rangle$
Soient x et y deux vecteurs de E. Alors :

$$\boxed{|\langle x,y\rangle| \leq \|x\|.\|y\|}$$

Avec égalité si et seulement si les deux vecteurs sont proportionnels.

Preuve 4 :

1. Soient $(x,\ y) \in E^2$. On considère la fonction $\varphi(\lambda) = \langle x+\lambda.y, x+\lambda.y\rangle$ avec $\lambda \in \mathbb{R}$.
   Après développement, on constate que lorsque $y \neq 0$, $\varphi(\lambda)$ est un polynôme positif de degré 2 en λ
   Son discriminant est donc négatif...
2. Pour l'égalité :
   (a) Si les deux vecteurs sont proportionnels, on a immédiatement l'égalité.
   (b) Si on a l'égalité, alors il existe un λ_0 tel que $\varphi(\lambda_0) = 0$ ...

Remarque 9. Cette inégalité permet de démontrer un grand nombre d'inégalités originales.

`Exemple 8.` $(*)$

1. Ecrire les inégalités de Cauchy-Schwarz obtenues pour chacun des produits scalaires précédents.
2. Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, montrer que : $\left(\int_0^1 t.P(t)\,\mathrm{d}t\right)^2 \leq \frac{1}{3}\int_0^1 P^2(t)\,\mathrm{d}t$
3. Pour tout $(x_1,\ \dots,\ x_n) \in \mathbb{R}^n$, montrer que : $\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^n x_k^2$ (cas d'égalité ?)

Exercice : 5

$(*)$ Soit f une fonction strictement positive, continue sur l'intervalle $[a; b]$. On pose : $l(f) = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.\int_a^b \frac{1}{f(t)}\,\mathrm{d}t.$

1. Montrer que $l(f) \geq (b-a)^2$
2. Etudier les cas d'égalité.

Corollaire 5 : **Inégalité triangulaire**
Soit E un espace préhilbertien réel.
Soient x et y deux vecteurs de E. Alors :

$$\boxed{\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|}$$

De plus, on a l'égalité $\|x+y\| = \|x\| + \|y\|$ ssi $x = \lambda y$ ou $y = \lambda x$ avec $\lambda \geq 0$

Preuve 5 : Par équivalences successives, on est ramené à utiliser Cauchy-Schwarz.

Corollaire 6 : **Côtés d'un triangle**
Soit E un espace préhilbertien réel.
Soient $x,\ y$ et z trois vecteurs de E. Alors :

$$\boxed{d(x,\ y) \leq d(x,\ z) + d(z,\ y)}$$

Preuve 6 : Conséquence immédiate de l'inégalité triangulaire.

2 Orthogonalité

Dans toute cette section, on considère $(E,\ \langle .,. \rangle)$ un espace préhilbertien réel.
La norme utilisée sera la norme euclidienne associée à $\langle .,. \rangle$.

2.1 Définitions et premières propriétés

Définition 6 : **Orthogonalité de 2 vecteurs et de 2 sev**
Soit E un espace préhilbertien réel munis du produit scalaire $\langle .,. \rangle$.

1. Soient x et y deux vecteurs de E :
   On dit que x et y sont *orthogonaux* (noté $x \perp y$) lorsque : $\langle x, y \rangle = 0$.
2. Soient $x \in E$ et F un sev de E :
   On dit que x est orthogonal à F (noté $x \perp F$) lorsque : $\forall f \in F,\ \langle x, f \rangle = 0$.
3. Soient F et G deux sev de E :
   On dit que F et G sont *orthogonaux* (noté $F \perp G$) lorsque : $\forall (x,\ y) \in F \times G,\ \langle x, y \rangle = 0$.

Remarque 10.

1. Le vecteur nul est orthogonal à tous les autres vecteurs.

2. La notion d'orthogonalité est relative au produit scalaire choisi. Ainsi, deux vecteurs peuvent être orthogonaux pour un certain produit scalaire mais pas pour un autre. Prendre un exemple dans $\mathbb{R}_2[X]$.

`Exemple 9.` $(*)$ Vérifier que les vecteurs suivants sont orthogonaux :

1. $(1,\ 2,\ 3)$ et $(-5,\ 2, 1)$ dans $\mathbb{R}^3$ eucliden usuel.
2. $x \mapsto \cos x$ et $x \mapsto \sin x$ dans $\mathcal{C}_{2\pi}(\mathbb{R})$ muni du PS $\langle f, g\rangle = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} f(t)g(t)dt$

Exercice : 6

$(*)$ Trouver :

1. une matrice B orthogonale à $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ euclidien usuel
2. un polynôme Q orthogonal à $P = 1 + X + X^2$ pour le PS $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\sum_{k=0}^{2} P(k).Q(k)$ de $\mathbb{R}_2[X]$.

Méthodes en dimension finie :

Soit $\begin{cases} F = \text{Vect}(f_1,\ \dots,\ f_p) \\ G = \text{Vect}(g_1,\ \dots,\ g_q) \end{cases}$ deux sev de E et $x \in E$. On a alors les équivalences suivantes :

- $x \perp F \iff \forall k \in [\![1, p]\!],\ \langle x, f_k\rangle = 0$
- $F \perp G \iff \forall (i,\ j) \in [\![1, p]\!] \times [\![1, q]\!],\ \langle f_i, g_j\rangle = 0$

Ces deux résultats permettent de démontrer plus facilement (calculs moins longs) que $x \perp F$ ou que $F \perp G$.

`Exemple 10.` $(*)$ Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, trouver les réels a et b tels que $\begin{pmatrix} 1 \\ a \\ b \end{pmatrix} \perp \text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix})$.

`Exemple 11.` $(*)$ Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien usuel, démontrer que $\text{Vect}(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}) \perp \text{Vect}(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},\ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix})$.

Théorème 7 : **Pythagore**

Soit $(E,\ \langle ., .\rangle)$, un espace préhilbertien réel et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.
Soient x et y deux vecteurs de E. Alors

$$\boxed{x \perp y \iff \langle x, y\rangle = 0 \quad \iff \quad \|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2}$$

Preuve 7 : Pas de difficulté !

Remarque 11. Dans un espace préhilbertien, peut-il exister un triangle équilatéral rectangle ?

Définition 7 : **Orthogonal d'une partie**

Soit E un espace préhilbertien réel munis du produit scalaire $\langle ., .\rangle$.
Soit A une partie non vide de E :
On appelle l'*orthogonal* de A (noté $A^\perp$) l'ensemble de tous les vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de A.

$$A^\perp = \{x \in E \mid \forall a \in A,\ \langle x, a\rangle = 0\}$$

Remarque 12. On a : $\{0\}^\perp = E$ et $E^\perp = \{0\}$

Proposition 8 :

$$A \perp B \iff A \subset B^\perp$$

Preuve 8 : Facile.

THÉORÈME 9 : **Propriétés de l'orthogonal d'une partie**
Soient $A,\ B \subset E$ deux parties non vides de E et $a \neq 0$.

P1 : $A^\perp$ est un sev de E
P2 : $a^\perp$ est un hyperplan de E
P3 : $A \subset B \Rightarrow B^\perp \subset A^\perp$
P4 : $A^\perp = \text{Vect}(A)^\perp$
P5 : $A \subset [A^\perp]^\perp$

Preuve 9 :
P1 : On démontre que $A^\perp$ est une partie non vide de E stable par CL.
P2 : On remarque que $a^\perp = \ker\varphi$ où φ est l'application non nulle de E dans $\mathbb{R}$ telle que $\varphi(x) = \langle x, a\rangle$.
P3 : On considère un élément de $B^\perp$ et on montre qu'il est orthogonal à tout élément de A.
P4 : Comme $A \subset \text{Vect}(A)$ alors $\text{Vect}(A)^\perp \subset A^\perp$. Soit $x \in A^\perp$ ...
P5 : Tout élément de A est orthogonal aux vecteurs de $A^\perp$.

Méthode : Recherche de l'orthogonal d'un sev de dimension finie.

Soit $F = \text{Vect}(f_1,\ \dots,\ f_p)$ et $x \in E$.
Remarquons que $F^\perp = \{f_1,\ \dots,\ f_p\}^\perp$ et donc :

$$x \in F^\perp \iff \forall k \in [\![1,p]\!],\ \langle x, f_k\rangle = 0$$

La recherche de $F^\perp$ se ramène alors à la résolution d'un système de p équations.

`Exemple 12.` $(*)$ Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, déterminer $F^\perp$ où $F = \text{Vect}(\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix},\ \begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix})$.

THÉORÈME 10 : **Un sev et son orthogonal sont en somme directe**
Si F est un sev d'un espace préhilbertien E alors : $\begin{cases} F^\perp \text{ est un sev de } E \\ F \cap F^\perp = \{0\}\end{cases}$ et donc $F + F^\perp = F \oplus F^\perp$.

Preuve 10 : Nous savons déjà que l'orthogonal d'une partie de E est un sev.
On prouve que $F \cap F^\perp = \{0\}$ en remarquant que si x appartient à $F \cap F^\perp$ alors il est orthogonal à lui-même.

Remarque 13. Nous verrons plus loin que $E = F \oplus F^\perp$ lorsque F est de dimension finie.

DÉFINITION 8 : **Famille orthogonale et famille orthonormale**
Soit $(E,\ \langle .,.\rangle)$, un espace préhilbertien réel.

1. On appelle *famille orthogonale* de E toute famille de vecteurs $(x_i)_{i\in I}$ de E deux à deux orthogonaux :

$$\boxed{(x_i)_{i\in I} \text{ est orthogonale } \iff \forall (i,\ j) \in I^2,\quad i \neq j \Rightarrow \langle x_i, x_j\rangle = 0}$$

2. On appelle *famille orthonormale* de E toute famille orthogonale de vecteurs unitaires de E.
On aura alors :

$$\boxed{(x_i)_{i\in I} \text{ est orthonornale } \iff \langle x_i, x_j\rangle = \delta_{i,j}}$$

Remarque 14. On obtient facilement une famille orthonormale à partir d'une famille orthogonale de vecteurs **non nuls** en normant chaque vecteur.

`Exemple 13.` $(*)$ Vérifier que :

1. La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une famille orthonormale lorsque $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel.
2. La base canonique de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est une famille orthonormale lorsque $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est muni du produit scalaire usuel.

Exercice : 7

$(**)$ On définit une application $\varphi\ :\ \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \mapsto \mathbb{C}$ par $\varphi(P,\ Q) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} P(e^{i\theta})Q(e^{-i\theta})\ \mathrm{d}\theta$.

1. Montrer que φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $(1,\ X,\ \dots,\ X^n)$ est une famille orthonormée de $\mathbb{R}[X]$ muni du produit scalaire φ.

Théorème 11 : **Liberté d'une famille orthogonale**
Une *famille orthogonale* de vecteurs $\boxed{\text{non-nuls}}$ est libre.

Preuve 11 : On considère une CL nulle de vecteurs $(x_1,\ \dots,\ x_n)$ d'une famille orthogonale F.
Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ on prend alors le produit scalaire de cette CL par x_i.

`Exemple 14.` $\mathbb{R}_n[X]$ dispose d'une unique base orthogonale pour chacun des produits scalaires suivants telle que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, le k^{eme} polynôme est de degré $k-1$ et de coefficient dominant 1 :

1. $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ (Poly de Legendre)
2. $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{0}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t}\,\mathrm{d}t$ (Poly de Laguerre)
3. $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ (Poly de l'Hermite)
4. $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{0}^{\pi} P(\cos t)Q(\cos t)\,\mathrm{d}t$ (Poly de Tchebychev)

L'étude de ces polynômes fait très souvent l'objet de problèmes de concours.

Remarque 15. Généralisation de Pythagore : si $(x_1,\ \dots,\ x_n)$ est orthogonale, alors $\left\|\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i\right\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n}\|x_i\|^2$.

Que pensez-vous de la réciproque ?...

2.2 Orthonormalisation de Schmidt

Théorème Fondamental 12 : **Théorème et procédé de Schmidt**
Soit $e = (e_1,\ \dots,\ e_n)$ une famille libre quelconque d'un espace préhilbertien réel E.

Alors il existe une famille *orthonormale* $\varepsilon = (\varepsilon_1,\ \dots,\ \varepsilon_n)$ de E vérifiant :

$$\begin{cases} \mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\ \dots,\ \varepsilon_n) = \mathrm{Vect}(e_1,\ \dots,\ e_n) \\ \langle \varepsilon_n, e_n\rangle > 0 \end{cases}$$

La méthode de construction de cette famille est donnée dans la démonstration.

Preuve 12 : On procède par récurrence sur n.

1. Pour $n = 1$: $\varepsilon_1 = \dfrac{e_1}{\|e_1\|}$ convient.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons que pour toute famille libre $(e_1,\ \dots,\ e_n)$, une famille $(\varepsilon_1,\ \dots,\ \varepsilon_n)$ vérifiant la propriété du théorème existe.
Soit $(e_1,\ \dots,\ e_{n+1})$ une famille libre.
La sous famille $(e_1,\ \dots,\ e_n)$ est aussi une famille libre et on peut donc construire une famille $(\varepsilon_1,\ \dots,\ \varepsilon_n)$ vérifiant la propriété du théorème.
On construit alors ε_{n+1} tel que $\begin{cases} \mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\ \dots,\ \varepsilon_{n+1}) = \mathrm{Vect}(e_1,\ \dots,\ e_{n+1}) \\ \forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle \varepsilon_{n+1}, \varepsilon_i\rangle = 0 \\ \langle \varepsilon_{n+1}, e_{n+1}\rangle > 0 \end{cases}$.

$$\text{Cherchons } g_{n+1} \text{ sous la forme } \boxed{g_{n+1} = e_{n+1} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i.\varepsilon_i}.$$

(a) On a $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \langle g_{n+1}, \varepsilon_i\rangle = 0 \iff \lambda_i = -\langle e_{n+1}, \varepsilon_i\rangle$.

(b) Comme $\forall i \in [\![1, n]\!],\ \begin{cases} \varepsilon_i \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots,\ e_n) \\ \varepsilon_{n+1} \in \mathrm{Vect}(e_1, \dots,\ e_{n+1}) \end{cases}$ on a $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \dots,\ \varepsilon_{n+1}) \subset \mathrm{Vect}(e_1, \dots,\ e_{n+1})$.
On vérifie facilement que $g_{n+1} \neq 0$ et on le normalise pour obtenir $\varepsilon_{n+1} = \dfrac{g_{n+1}}{\|g_{n+1}\|}$.
$(\varepsilon_1,\ \dots,\ \varepsilon_{n+1})$ est donc une famille de vecteurs non nuls orthonormale et donc :
$\mathrm{Vect}(\varepsilon_1,\ \dots,\ \varepsilon_{n+1}) = \mathrm{Vect}(e_1,\ \dots,\ e_{n+1})$.

(c) Avec ε_{n+1} ainsi défini, on vérifie facilement que $\langle \varepsilon_{n+1}, e_{n+1}\rangle > 0$.

Remarque 16. L'algorithme de construction pas à pas de la famille ε par le procédé de Schmidt est aussi important que l'énoncé du théorème. Il est très utilisé en pratique.

`Exemple 15.` ($*$) Appliquer le procédé d'orthonormalisation de Schmidt à différentes familles libres dans différents espaces préhilbertiens.

Remarque 17. La démonstration du théorème prouve également que la *bon* obtenue par le procédé de Schmidt vérifie :

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \begin{cases} \mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ \ldots, \ \varepsilon_k) = \mathrm{Vect}(e_1, \ \ldots, \ e_k) \\ \langle \varepsilon_k, e_x \rangle > 0 \end{cases}$$

`Exemple 16.` ($*$) Soit $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.
Déterminer une base orthonormale (bon) de l'hyperplan d'équation $x + 2y - z + t = 0$.

Exercice : 8
($**$) Vérifier l'unicité de la famille $(\varepsilon_1, \ \ldots, \ \varepsilon_n)$ vérifiant les propriétés imposées par Schmidt.

2.3 Bases orthonormales

Définition 9 : **bases orthogonales, orthonormales**
Soit $e = (e_1, \ldots, \ e_n)$ une base de $(E, \ \langle .,. \rangle)$ où $\langle .,. \rangle$ est un produit scalaire quelconque.
On dit que e est une base :
1) *orthogonale* ssi $\forall (i, \ j) \in [1, n]^2, \quad i \neq j \Rightarrow \langle e_i, e_j \rangle = 0$
2) *orthonormale* ssi $\forall (i, \ j) \in [1, n]^2, \quad \langle e_i, e_j \rangle = \delta_{ij}$

Remarque 18. On dira que $\mathbb{R}^n$ est muni de sa structure euclidienne usuelle si $\mathbb{R}^n$ est muni de la base canonique et du produit scalaire usuel. Dans ce cas, la base canonique est une bon.

Remarque 19. La base canonique de $\mathfrak{M}_{np}(\mathbb{R})$ est une base orthonormale pour le produit scalaire usuel.

Corollaire 13 : **Existence d'une bon dans tout espace euclidien**
Tout espace euclidien $E \neq \{0_E\}$ possède une base orthonormale.

Preuve 13 : Le procédé de schmidt permet de construire une base orthonormale à partir de toute base de E.

Remarque 20.

1. Tout sev de dimension finie d'un espace préhilbertien E possède aussi une base orthonormale.
2. La matrice de passage d'une base e vers son orthogonalisée par Schmidt ε est triangulaire supérieure et ces deux bases ont la même orientation.

Proposition 14 : **Théorème de la base orthonormée incomplète**
Toute famille orthonormée d'un espace euclidien E se complète en une base orthonormée de E

Preuve 14 : On utilise le thorème de la base incomplète et on *orthogonalise* les vecteurs ajoutés grâce au procédé de Schmidt.

Théorème Fondamental 15 : **Coordonnées, Produit Scalaire et Norme dans une bon**
Soit $e = (e_1, \ \ldots, \ e_n)$ une bon de E muni d'un produit scalaire quelconque $\langle .,. \rangle$.

1) Coordonnées d'un vecteur x dans une bon : $\quad x = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} \langle x, e_i \rangle . e_i$
2) Expression du Produit Scalaire :
   Soient $\begin{cases} x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n \\ y = y_1 e_1 + \cdots + y_n e_n \end{cases}$: $\quad \langle x, y \rangle = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i y_i = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n \quad = {}^t XY$
3) Expression de la norme :
   Soit $x = x_1 e_1 + \cdots + x_n e_n$ un vecteur de E : $\quad \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2 \quad = {}^t XX$

On constate que la donnée d'une base orthonormée permet de déterminer le produit scalaire dont est muni l'espace vectoriel.

Preuve 15 :

1. On exprime $x = \sum_{i=1}^{n} x_i.e_i$, puis pour tout $i \in [0\ ;\ n]$ on prend le produit scalaire de x par e_i.
2. et 3. Immédiat !

Remarque 21. IMPORTANT ! ! Dans les exercices sur les espaces euclidiens, on aura en général intérêt à se placer dans une bon.
En effet, dans une bon, le produit scalaire de 2 vecteurs s'exprime comme le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

`Exemple 17.` $(*)$ $\mathbb{R}^3$ est muni d'un produit scalaire tel que $\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right)$ soit bon.

Calculer le produit scalaire $\langle (x,\ y,\ z), (x',\ y',\ z')\rangle$.

Corollaire 16 : Dans un espace euclidien, introduire une base orthonormale revient à introduire un produit scalaire.

Exercice : 9

$(*)$ Soit l'espace $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire $\langle P, Q\rangle = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)dt$.

1. Trouver une base orthonormée ε de E.
2. Trouver les coordonnées du vecteur $P = X + 1$ dans la base ε.

Exercice : 10

$(*)$ Soit $f \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace euclidien vérifiant $\forall x,\ y \in E,\ \langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.
Montrer que la matrice de f dans une bon est symétrique.
Ces endomorphismes sont appelés des "endomorphismes symétriques".

3 Projections orthogonales

3.1 Préliminaires

Théorème 17 : **Supplémentaire orthogonal**
Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de **dimension finie** de E.
Alors :

$$\boxed{E = F \oplus F^\perp} \quad \text{et si } \dim E < +\infty \text{ alors : } \quad \boxed{\dim F + \dim F^\perp = \dim E} \quad \text{et} \quad (F^\perp)^\perp = F$$

Preuve 17 :

1. On procède par analyse/synthèse :
   Supposons que $E = F + F^\perp$ et notons $\mathcal{B} = (e_1,\ \ldots,\ e_n)$ une base de F. (on verra qu'une bon est préférable !)
   Soit $x \in E$. On cherche alors $(\lambda_1,\ \ldots,\ \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$ tel que $x - (\lambda_1.e_1 + \cdots + \lambda_n.e_n) \in F^\perp$, c'est à dire tel que on a pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, $\langle x - (\lambda_1.e_1 + \cdots + \lambda_n.e_n), e_i\rangle = 0$. Cela nous donne une valeur unique pour chacun des λ_i.
   La réciproque est immédiate.
2. $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$ est une conséquence du résultat précédent.
3. Nous savons déjà que $F \subset (F^\perp)^\perp$. L'égalité des dimensions permet de conclure que $(F^\perp)^\perp = F$.

`Exemple 18.` $(*)$ Si F n'est pas de dimension finie, alors on n'a pas nécessairement $F \oplus F^\perp = E$. En effet ...
Soit $E = l^2(\mathbb{N},\ \mathbb{R})$ l'ensemble des suites $(u_n) \in \mathbb{R}^\mathbb{N}$ telles que $\sum u_n^2$ converge, muni de son produit scalaire usuel :

$$\langle (u_n), (v_n)\rangle = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k v_k$$

Soit F le sev de E défini par $F = \text{Vect}(e^{(n)})$ où $e^{(n)} = (\delta_{i,n})_{i\in\mathbb{N}}$.
Déterminer $F^\perp$ et prouver que $F \oplus F^\perp \neq E$.

Exercice : 11

$(*)$ Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E vérifiant pour tout $(x,\ y) \in E^2$, $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.
Montrer que $\operatorname{Im} f = (\ker f)^\perp$.

Exercice : 12

$(*)$ Soit F et G deux sev d'un ev euclidien E.

1. Montrer que $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
2. Montrer que $(F\cap G)^\perp = F^\perp + G^\perp$

Corollaire 18 : **Hyperplan en dimension finie**
Soit H une partie d'un espace euclidien E. On a :

$$H \text{ est un hyperplan de } E \iff \exists n \in E \text{ non nul tel que } H = \overrightarrow{n}^\perp$$

$\overrightarrow{n}$ est appelé un *vecteur normal* à l'hyperplan H.
Si dans une bon, H admet pour EC $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0$ alors $\overrightarrow{n} = (a_1,\ \ldots,\ a_n) \perp H$.

Preuve 18 : En effet, dans une bon nous avons $a_1x_1 + \cdots + a_nx_n = 0 \iff \langle n, x\rangle = 0$ avec $x = (x_1,\ \ldots,\ x_n)$.

3.2 Projection orthogonale

Quelques rappels :

Soient E_1 et E_2 deux sev de E tels que $E = E_1 \oplus E_2$.
On rappelle que :

1. Tout $x \in E$ se décompose de façon unique en $x = x_1 + x_2$ avec $\begin{cases} x_1 \in E_1 \\ x_2 \in E_2 \end{cases}$.

   L'application $p\ : x \mapsto x_1$ est appelée la *projection sur E_1 parallèlement à E_2* et on a : $\begin{cases} E_1 = \operatorname{Im} p \\ E_2 = \ker p \end{cases}$.
2. Si $\begin{cases} p \text{ est la projection sur } E_1 \text{ parallèlement à } E_2 \\ q \text{ est la projection sur } E_2 \text{ parallèlement à } E_1 \end{cases}$ alors $\boxed{\mathrm{id}_E = p + q}$. q est appelée la *projection associée* à p.
3. On rappelle enfin la caractérisation suivante : $p \in \mathcal{L}(E)$ est un projecteur $\iff p \circ p = p$

Définition 10 : **Projection orthogonale**
Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de **dimension finie**.
La projection sur F parallèlement à $F^\perp$ est appelée la *projection orthogonale* sur F

Remarque 22. Si E est un espace euclidien, alors q, la projection associée à p est la projection orthogonale sur $F^\perp$.

Proposition 19 : En dimension finie, un projecteur p est un projecteur orthogonal si et seulement si $\operatorname{Im} p \perp \ker p$.

Preuve 19 : On démontre facilement que $\ker p = (\operatorname{Im} p)^\perp$ avec une inclusion et l'égalité des dimensions.

`Exemple 19.` $(*)$ Soit $p \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est $P = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$.
Supposons que $\mathbb{R}^3$ est muni de son produit scalaire usuel.
Prouver alors que p est un projecteur orthogonal.

Exercice : 13

$(*)$ Montrer qu'un projection orthogonal p vérifie : $\forall x,\ y \in E,\ \langle p(x), y\rangle = \langle x, p(y)\rangle$.
En déduire que sa matrice dans une bon de E est symétrique.
On dit alors que p est un endomorphisme auto-adjoint.

Exercice : 14

$(**)$ Soit E un espace euclidien muni d'une *bon* e et $p \in L(E)$ tel que $P = \mathrm{Mat}_e(p)$.

Montrer que p est un projecteur orthogonal si et seulement si : $\left\{\begin{array}{l} P^2 = P \\ {}^tP = P \end{array}\right.$.

Aide : on pourra utiliser le résultat de l'exercice précédent.

THÉORÈME FONDAMENTAL 20 : **Expression dans une bon**
Soit E un espace préhilbertien réel et F un sous-espace vectoriel de E de dimension finie n.
Soit $(e_1, \ \dots, \ e_n)$ une base orthonormale de F.

La projection orthogonale sur F est définie par : $\forall x \in E, \quad \boxed{p(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle . e_k}$

Preuve 20 : C'est une conséquence immédiate de la démonstration du théorème précédent.

Remarque 23. Vous remarquerez que, le vecteur ε_p obtenu avant normalisation avec le procédé d'orthonormalisation de Schmidt n'est autre que le projeté orthogonal de e_p sur $\mathrm{Vect}(\varepsilon_1, \ \dots, \ \varepsilon_{p-1})$.

Dessin

Projection orthogonale de x sur un sev F muni d'une bon.

Méthode 1 : Déterminer $p(x)$, l'expression de la projection orthogonale sur F :

1. On commence par déterminer une bon $(e_1, \ \dots, \ e_n)$ de F (avec Schmidt... bien sûr !)
2. On applique alors la formule : $\boxed{p(x) = \sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k \rangle . e_k}$

Méthode 2 : Trouver $p(x)$ sans rechercher une bon de F :

1. On détermine une base quelconque de F, $(f_1, \dots, \ f_p)$
2. On décompose $p(x)$ sur cette base : $p(x) = \lambda_1 f_1 + \cdots + \lambda_p f_p$
3. On écrit les p conditions d'orthogonalité : $\forall i \in [1, \ p]$, $\langle x - p(x), f_i \rangle = 0$
4. On résout alors le système de p équations obtenu.

`Exemple 20.` $(*)$ Dans $\mathbb{R}^4$ euclidien usuel.
En utilisant chacune des deux méthodes précédentes, déterminer l'expression analytique de la project° orthogonale sur $\mathrm{Vect}((1, \ 0, \ 0, \ -1), \ (1, \ 0, \ -1, \ 0))$.

COROLLAIRE 21 : **Projection orthogonale sur une droite vectorielle**
Soit n un vecteur non nul d'un espace **euclidien** E.
Si p est la projection orthogonale sur $\mathrm{Vect}(n)$ alors :

$$\forall x \in E, \quad \boxed{p(x) = \langle x, \frac{n}{\|n\|} \rangle . \frac{n}{\|n\|}}$$

Preuve 21 : C'est une application immédiate de la définition.

`Exemple 21.` ($*$) Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique e.
Déterminer la matrice de p, la projection orthogonale sur la droite vectorielle engendrée par le vecteur $(1,\ 2,\ 3)$.

Corollaire 22 : **Projection orthogonale sur un hyperplan vectoriel**
Soit n un vecteur non nul d'un espace **euclidien** E et $H = \operatorname{Vect} n^{\perp}$.
Si p est la projection orthogonale sur H alors :

$$\forall x \in E, \qquad \boxed{p(x) = x - \langle x, \frac{n}{\|n\|}\rangle . \frac{n}{\|n\|}}$$

Preuve 22 : En effet, la projection associée à p est la projection orthogonale sur $\operatorname{Vect} n$.

`Exemple 22.` ($*$) Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel et de sa base canonique e.
Déterminer la matrice de p, la projection orthogonale sur le plan d'équation $x + y - z = 0$.

`Exemple 23.` ($*$) Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel.
En utilisant chacune des trois méthodes précédentes, déterminer l'expression analytique de la project° orthogonale sur $P : x - 2y + z = 0$.

`Exemple 24.` ($*$) Projeté orthogonal de X^3 sur $\mathbb{R}_2[X]$ lorsque $\mathbb{R}_3[X]$ est muni du PS : $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_0^1 PQ$?

Exercice : 15
($**$) Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormale de E un espace euclidien de dimension n.
Soit F un sev de E de bon $(a_1,\ \dots,\ a_p)$. On note $A_1,\ \dots,\ A_p$ les matrices colonnes des a_k dans $\mathcal{B}$.
Soit p_F la projection orthogonale sur F. Prouver que $\operatorname{Mat}_{\mathcal{B}}(p_F) = \displaystyle\sum_{k=1}^{p} A_k\ {}^tA_k$.

Expression d'une projection orthogonale sur F :

- <u>Méthode 1</u> : Lorsque $F = \operatorname{Vect}(u)$ est une droite vectorielle, on applique : $p(x) = \langle x, \frac{u}{\|u\|}\rangle . \frac{u}{\|u\|}$.
- <u>Méthode 2</u> : Lorsque $F = n^{\perp}$ est un hyperplan on applique la formule : $p(x) = x - \langle x, \frac{n}{\|n\|}\rangle . \frac{n}{\|n\|}$.
- <u>Méthode 3</u> : Lorsqu'on n'est pas dans l'un des cas précédents et que $F = \operatorname{Vect}(f_1,\ \dots,\ f_p)$, on applique la méthode générale :
$$x' = p(x) \Longleftrightarrow \begin{cases} x' \in F \\ x - x' \in F^{\perp} \end{cases}$$
- <u>Méthode 4</u> : Lorsque $(f_1,\ \dots,\ f_p)$ est une bon de F, on applique la formule :
$$p(x) = \langle x, f_1\rangle f_1 + \langle x, f_2\rangle f_2 + \cdots + \langle x, f_p\rangle f_p$$

3.3 Symétrie orthogonale

On pourrait facilement à ce stade définir la notion de *symétrie orthogonale*... Cependant, ces transformations seront plus particulièrement étudiées dans le chapitre portant sur les isométries.

3.4 Application : Distance d'un vecteur à un sev de dimension finie

E désigne un espace préhilbertien réel.

Définition 11 : **Distance d'un vecteur à un sev de dimension finie**
Pour $x \in E$, et F un sev de dimension finie de E, on définit

$$d(x,\ F) = \inf_{f \in F} d(x,\ f) \quad (= \inf_{f \in F} ||x - f||)$$

Remarque 24. $\{d(x,\ f) \mid f \in F\}$ est une partie non vide minorée de $\mathbb{R}$. Elle admet donc bien une borne inférieure. Le théorème suivant montre que $d(x,\ F)$ est atteint en $p(x)$ où p est la projection orthogonale sur F.

Dessin

Théorème 23 : **Formule**
Soient $x \in E$ et F un sev de dimension finie de E.

$$\boxed{d(x,\ F) = \|x - p_F(x)\|} \quad \text{où} \quad p_F(x) \text{ est la projection orthogonale de } x \text{ sur } F$$

Preuve 23 :

1. Prouvons que $\forall f \in F,\ d(x,\ f) \geq \|x - p_F(x)\|$.
   $\|x-f\|^2 = \|x-p_F(x)+p_F(x)-f\|^2 = \|x-p_F(x)\|^2+\|p_F(x)-f\|^2 \geq \|x-p_F(x)\|^2$ (d'après Pythagore)
2. D'autre part $p_F(x) \in F$. Donc $d(x,\ F) = \|x - p_F(x)\|$.

Remarque 25. On a aussi $d(x,\ F) = \sqrt{\|x\|^2 - \|p_F(x)\|^2}$.

`Exemple 25.` $(*)$ Soit $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire usuel. Calculer $d(x, F)$ où $F = \text{Vect}((1,\ 1,\ 1))$ et $x = (3,\ 2,\ 1)$.

Exercice : 16
$(**)$ Soit $E = \mathcal{C}([-\pi, \pi], \mathbb{R})$.
Trouver $(a,\ b) \in \mathbb{R}^3$ tels que la quantité $\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi} \left(e^t - (a + b\sin t)\right)^2\ \mathrm{d}t$ soit minimale.

4 Les hyperplans affines

Les hyperplans affines sont les sous-espaces affines de direction un hyperplan vectoriel.

Proposition 24 : **Hyperplans et Lignes de niveaux**

Soit E un espace euclidien, $\left\{\begin{array}{l} A \text{ un point de } E \\ \overrightarrow{n} \text{ un vecteur non nul de } E \end{array}\right.$, $f : \begin{array}{ccc} \mathcal{E} & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ M & \mapsto & \overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n} \end{array}$ et $\alpha \in \mathbb{R}$.

L'ensemble $\mathcal{H}_\alpha$ des points $M \in \mathcal{E}$ tels que $f(M) = \alpha$ est un hyperplan affine de direction $\overrightarrow{H} = \mathcal{H}_{f(O)} = \overrightarrow{n}^\perp$.
$\mathcal{H}_0$ est l'hyperplan affine passant par A et de direction $\overrightarrow{n}^\perp$

Preuve 24 : On commence par rechercher un point $B \in \mathcal{H}_\alpha$ tel que $B = A + \lambda\overrightarrow{n}$.
Puis, on recherche les points M de $\mathcal{H}_\alpha$ sous la forme $M = B + \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u} \in E$.
On constate alors que $M \in \mathcal{H}_\alpha \iff M = B + \overrightarrow{u}$ avec $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{n}^\perp \iff M \in B + \overrightarrow{n}^\perp$.

Remarque 26. $\mathcal{H}_\alpha$ est appelé la *ligne de niveau* α de la fonction f.

Ligne de niveau α de f

Théorème 25 : **Caractérisation des hyperplans affines dans un espace euclidien**
Soit H un sous-espace affine d'un espace euclidien E. On a alors :

$$H \text{ est un hyperplan affine de } E \quad \Longleftrightarrow \quad \exists n \in E \text{ non nul tel que } \overrightarrow{H} = n^{\perp}$$

n est alors appelé un *vecteur normal* à l'hyperplan affine $\mathcal{H}$.

Preuve 25 : Déjà vu !

Proposition 26 : **Equation d'un hyperplan affine**
Soit $\mathcal{H}$ une partie d'un espace euclidien E. On a alors :

$$\mathcal{H} \text{ est un hyperplan affine de } E$$
$$\Longleftrightarrow$$
$$\mathcal{H} \text{ admet une équation cartésienne de la forme } \quad \alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} = 0$$

Si le repère choisi est un ron, alors le vecteur $\overrightarrow{n} = (\alpha_1,\ \dots,\ \alpha_n)$ est un vecteur normal à $\mathcal{H}$.

Preuve 26 : Par équivalences successives.

`Exemple 26.`

1. les hyperplans affines de $\mathbb{R}^2$ sont les ensembles de points d'équation cartésienne $ax + by + c = 0$ avec $(a,\ b) \neq (0,\ 0)$.
2. les hyperplans affines de $\mathbb{R}^3$ sont les ensembles de points d'équation cartésienne $ax + by + cz + d = 0$ avec $(a,\ b,\ c) \neq (0,\ 0,\ 0)$.

Proposition 27 : **Distance à un hyperplan affine**

Soit $\mathcal{H}$ un hyperplan affine $\begin{cases} \text{passant par le point } A \\ \text{de vecteur normal } \overrightarrow{n} \end{cases}$ et $M \in E$.
La distance de M à $\mathcal{H}$ est définie par $d(M,\ \mathcal{H}) = \inf\{\|MH\| \mid H \in \mathcal{H}\}$.
On a alors :

$$d(M,\ \mathcal{H}) = \frac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{\|n\|}$$

Si dans un ron, $\mathcal{D}$ admet pour éq° cartésienne $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_n x_n + \alpha_{n+1} = 0$ et $M(m_1,\ \dots,\ m_n)$, alors on a :

$$d(M,\ \mathcal{H}) = \frac{|\alpha_1 m_1 + \cdots + \alpha_n m_n + \alpha_{n+1}|}{\sqrt{\alpha_1^2 + \cdots + \alpha_n^2}}$$

Preuve 27 :

1. On remarque que $d(M,\ \mathcal{H}) = d(\overrightarrow{AM},\ \overrightarrow{H}) = \|\overrightarrow{AM} - p(\overrightarrow{AM})\| = \|q(\overrightarrow{AM})\|$ où q est la proj° $\perp$ sur Vect $\overrightarrow{n}^{\perp}$.
   Ainsi : $d(M,\ \mathcal{H}) = \|\langle \overrightarrow{AM}, \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|}\rangle . \frac{\overrightarrow{n}}{\|\overrightarrow{n}\|}\| = \frac{|\overrightarrow{AM}.\overrightarrow{n}|}{\|\overrightarrow{n}\|}$
2. Simple calcul en appliquant la formule précédente.

Corollaire 28 : **Cas particulier de $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$**

1. Soit $M(x_M,\ y_M) \in \mathbb{R}^2$ et la droite $\mathcal{D} : ax + by + c = 0$. On a :
$$d(M,\ \mathcal{H}) = \frac{|ax_M + by_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$
2. Soit $M(x_M,\ y_M,\ z_M) \in \mathbb{R}^3$ et le plan $\mathcal{P} : ax + by + cz + d = 0$. On a :
$$d(M,\ \mathcal{H}) = \frac{|ax_M + by_M + cz_M + c|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}$$

`Exemple 27.` Appliquer les formules précédentes à des exemples de votre choix.

5 Exercices de TD

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs $\heartsuit$ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs $\heartsuit$ correspond à la difficulté des exercices.

I] Les produits scalaires

1. Un produit scalaire est une forme bilinéaire symétrique définie positives.
2. L'inégalité de Cauchy-Schwarz dit que : $|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$.
3. L'inégalité de Cauchy-Schwarz est une égalité lorsque les vecteurs x et y sont colinéaires.

Exercice de TD : 1

($\heartsuit\heartsuit$) Soit la matrice A égale à l'une des matrices suivantes : $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 0 & 2 & 10 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 13 & -2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$ ou $\begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 11 \end{pmatrix}$.

Dans $\mathbb{R}^3$ muni de sa base canonique e, on définit : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,\ y) & \mapsto & {}^tXAY \end{array}$ où : $\left\{ \begin{array}{l} X = mat_e x \\ Y = mat_e y \end{array} \right.$.

1. Montrer que l'application φ définit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^3$.
2. Proposer une nouvelle base e' dans laquelle $\varphi(x,\ y) =^t X'Y'$ où $\left\{ \begin{array}{l} X' = mat_{e'} x \\ Y' = mat_{e'} y \end{array} \right.$.

Exercice de TD : 2

($\heartsuit\heartsuit$) Soit a un vecteur unitaire de E un espace préhilbertien réel et $\varphi : \begin{array}{ccc} E \times E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (x,\ y) & \mapsto & \langle x, y\rangle + k\langle a, x\rangle\langle a, y\rangle \end{array}$.

Prouver que : φ est un produit scalaire si et seulement si $k > -1$.

Aide : On pensera à utiliser Cauchy-Schwarz.

Exercice de TD : 3

($\heartsuit\heartsuit$) Soit $x_1,\ \dots,\ x_n \in \mathbb{R}^{+*}$ tels que $x_1 + \cdots + x_n = 1$. Prouver que : $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} \geq n^2$. Cas d'égalité ?

Exercice de TD : 4

($**$) Soient a b deux vecteurs unitaires d'un espace vectoriel euclidien E et : $f : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & x - \langle a, x\rangle b \end{array}$.

1. A quelle condition f est-elle bijective ?
2. Exprimer $f^{-1}(x)$ lorsque c'est le cas.

II] Orthogonalité

1. Deux vecteurs x et y sont orthogonaux pour le produit scalaire $\langle ., .\rangle$ lorsque $\langle x, y\rangle = 0$.
2. L'orthogonal d'une partie F est le sev défini par $F^\perp = \{x \in E \mid \forall f \in F,\ \langle x, f\rangle = 0\}$?
3. Lorsque E est de dimension finie et F un sev de E, nous avons :
   $F \oplus F^\perp = E$ et donc $\dim F + \dim F^\perp = \dim E$.

Exercice de TD : 5

($\heartsuit\heartsuit$) Soit $x,\ y \in E$ un espace préhilbertien réel. Montrer que : $x \perp y \Longleftrightarrow \forall \lambda \in \mathbb{R},\ \|x + \lambda y\| \geq \|x\|$.

Exercice de TD : 6

($**$) Soit F et G deux sev de E de dimension quelconque tels que $F \oplus G = E$ et $F \subset G^\perp$.
Montrer que $F = G^\perp$.

Exercice de TD : 7

($**$) Soit $(e_1,\ \dots,\ e_n)$ une famille de vecteurs d'un espace euclidien $(E,\ \langle ., .\rangle)$ telle que : $\forall x \in E,\ \|x\|^2 = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \langle x, e_k\rangle^2$.

1. Prouver que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une famille orthogonale
2. Dans le cas où l'on a de plus $\forall k \in [\![1, n]\!]$, $\|e_k\| = 1$, prouver que $(e_1, \ldots, e_n)$ est une bon de E.
   Attention : on ne nous dit pas que E est de dimension n.

Exercice de TD : 8

($\heartsuit$) Soit E un espace euclidien et $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $\forall x,\ y \in E$ on a : $\langle f(x), y\rangle = \langle x, f(y)\rangle$.

1. Prouver que la matrice de f dans une bon est symétrique.
2. Montrer que $\operatorname{Im} f = (\ker f)^{\perp}$.
3. En déduire que l'image et le noyau de f sont supplémentaires orthogonaux.

Exercice de TD : 9

($\heartsuit\heartsuit$) Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel euclidien E tel que $\forall x \in E$, $\langle f(x), x\rangle = 0$.
Montrer que $\operatorname{Im} f = (\ker f)^{\perp}$.

Aide : vous pourrez commencer par vous intéresser à la quantité : $\langle f(x+y), x+y\rangle$

Exercice de TD : 10

($* * *$) Soient $x_1, \ldots, x_{n+2}$, $n+2$ vecteurs d'un espace euclidien de dimension $n \in \mathbb{N}^*$.
Montrer qu'il est impossible que $\forall i \neq j$, $\langle x_i, x_j\rangle < 0$.
Vous pourrez commencer par traiter les cas où $n = 1$ et $n = 2$.

Exercice de TD : 11

($**$) Soit E un espace euclidien et $f,\ g \in \mathcal{L}(E)$ qui commutent.
On suppose que les matrices de F et G dans une bon sont respectivement symétrique et antisymétrique.
Montrer que $\forall x \in E$, on a $\langle f(x), g(x)\rangle = 0$, puis que $\forall x \in E$, $\|(f+g)(x)\| = \|(f-g)(x)\|$.

Exercice de TD : 12

($\heartsuit\heartsuit - \heartsuit\heartsuit\heartsuit$) **Déterminant de Gram (1850-1916) :**

Soit $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de vecteurs d'un espace vectoriel euclidien E.
On note $G(x_1, \ldots, x_n) = (\langle x_i, x_j\rangle)_{(i,\ j) \in [\![1,n]\!]^2} \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que si $(x_1, \ldots, x_n)$ est liée alors $\det G(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

2. On suppose désormais que la famille $(x_1, \ldots, x_n)$ est libre et on pose $F = \operatorname{Vect}(x_1, \ldots, x_n)$.
   On note $M = mat_{\mathcal{B}}(x_1, \ldots, x_n)$ où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée de F.
   Exprimer $G(x_1, \ldots, x_n)$ en fonction de M et de ${}^tM$.
   En déduire que "$(x_1, \ldots, x_n)$ est libre $\iff \det G(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$" et que $\det G(x_1, \ldots, x_n) > 0$.

3. On introduit de plus $x \in E$. Montrer que $d(x,\ F) = \sqrt{\dfrac{\det G(x,\ x_1, \ldots, x_n)}{\det G(x_1, \ldots, x_n)}}$

Exercice de TD : 13

($\heartsuit\heartsuit - \heartsuit\heartsuit\heartsuit$) **Les polynômes de Legendre**

Montrer que $\langle P, Q\rangle = \displaystyle\int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t$ munit $E = \mathbb{R}_m[X]$ d'une structure d'espace euclidien.

1. Pour $m = 3$, construire une base orthogonale $(P_0,\ P_1,\ P_2,\ P_3)$ de E à partir de $(1,\ X,\ X^2, X^3)$ par la méthode de Gram-Schmidt telle que les P_i ont tous pour coefficient dominant 1.
2. Pour m entier naturel, notons $(P_0,\ P_1, \ldots, P_m)$ la base orthogonale de E obtenue à partir de $(X_i)_{0\leq i\leq m}$ par la méthode de Gram-Schmidt, tous ayant 1 pour coefficient dominant. Ces polynômes sont appelés les *polynômes de Legendre*.
   On pose pour tout $n \leq m$, $L_n(x) = \dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\big((x^2-1)^n\big) \quad (L_0(x) = 1)$
   (a) Déterminer la parité et le terme dominant de L_n.
   (b) Montrer que $\langle L_n, X^i\rangle = 0$ si $i < n$ et en déduire que $P_n = \dfrac{n!}{(2n)!}L_n$ pour tout $n \leq m$.
3. Compléments :
   (a) Donner une expression explicite de $L_0,\ L_1,\ L_2,\ L_3$.

(b) Exprimer $L_n(-x)$ en fonction de $L_n(x)$.

(c) Calculer $L_n(0)$. (On commencera par développer $R_n(x) = (x^2-1)^n$).

(d) En appliquant le théorème de Rolle aux dérivées successives de $(x^2-1)^n$, montrer que L_n admet n racines réelles distinctes, toutes comprises dans l'intervalle $[-1,\ 1]$.

III] Projecteurs et symétries orthogonaux

1. Lorsque $\dim F < +\infty$, on a $F \oplus F^\perp = E$ et on peut donc définir la projection orthogonale sur F
2. Si $(f_1,\ \ldots,\ f_p)$ est une bon de F alors la projection orthogonale sur F a pour expression :
$$p(x) = \langle x, f_1\rangle f_1 + \cdots + \langle x, f_p\rangle f_p$$
3. On peut aussi trouver l'expression $p(x)$ en remarquant que $p(x) \in F$ et que $x - p(x) \in F^\perp$.
4. Bien connaître le procédé d'orthonormalisation de Schmidt pour obtenir une bon d'un sev.

Exercice de TD : 14

($\heartsuit$) Dans $\mathbb{R}^3$ euclidien usuel, reconnaître l'endomorphisme dont la matrice dans la base canonique est $A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$.

Exercice de TD : 15

($\heartsuit\heartsuit$) Soit $e = (\overrightarrow{i},\ \overrightarrow{j},\ \overrightarrow{k})$ une base orthonormale de E et p le projecteur orthogonal sur un plan F de E.

1. Montrer que : $\|p(\overrightarrow{i})\|^2 + \|p(\overrightarrow{j})\|^2 + \|p(\overrightarrow{k})\|^2 = 2$.
Aide : on pourra se placer dans une bon bien choisie.
2. Pouvez-vous envisager et éventuellement prouver une généralisation de ce résultat ?

Exercice de TD : 16

($\heartsuit$) On considère $\mathbb{R}^4$ euclidien usuel et F et G défini par :

$F = \{(x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4,\ x+y+z+t = 0 \text{ et } x+2y+3z+4t = 0\}$ ou $F = \{(x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0 \text{ et } x-y+z-t = 0\}$

1. Rappeler ce que signifie "$\mathbb{R}^4$ euclidien usuel".
2. Déterminer une bon de F et une bon de $F^\perp$.
Expliquer pourquoi on obtient une bon de $\mathbb{R}^4$ en réunissant les deux bases précédentes.
3. Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
4. En déduire :
   (a) la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F.
   (b) la matrice de la projection orthogonale par rapport à $F^\perp$.
   (c) la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à $F^\perp$.
5. Calculer $d(u,\ F)$ où $u = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$.

Exercice de TD : 17

($**$) Soit E un espace vectoriel euclidien de dimension supérieure à 2.
Soit x et y deux vecteurs distincts de E tels que $\langle x, y\rangle = \|y\|^2$.
Montrer qu'il existe un unique hyperplan H de E tel que $y = p_H(x)$ où p_H est la projection orthogonale sur H.

Exercice de TD : 18

($\heartsuit\heartsuit$) Soit l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[X]$ munis du produit scalaire $\big\langle P, Q\big\rangle = \displaystyle\int_0^1 P.Q$

1. Déterminer l'orthogonal de $F = \text{Vect}(1,\ X)$
2. En déduire $\displaystyle\inf_{(a,\ b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^1 (x^2 - ax - b)^2\, \mathrm{d}x$.

Exercice de TD : 19

($\heartsuit\heartsuit$) Pour 2 matrices A et B de $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ on définit : $< A,\ B >= Tr(A^t B)$.

1. Montrer que $< ., . >$ est un produit scalaire sur l'espace vectoriel des matrices $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que l'ensemble des matrices symétriques et antisymétriques forment 2 sev orthogonaux pour ce produit scalaire.
3. Déterminer la projection orthogonale d'une matrice A sur l'espace des matrices antisymétriques.
4. Etant donné une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, déterminer la borne inférieure des ensembles :
   - $\{\sum_{i,\ j}(a_{ij} - m_{ij})^2 \mid M = (m_{ij} \in \mathcal{S}_n(\mathbb{R})\}$
   - $\{\sum_{i,\ j}(a_{ij} - m_{ij})^2 \mid M = (m_{ij} \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})\}$
5. Prouver que $\forall A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$, $\operatorname{Tr} A \leq \sqrt{n}\sqrt{\operatorname{Tr}({}^tAA)}$. Cas d'égalité ?
   Qu'en déduire dans le cas où A est une matrice orthogonale ?
6. Dans $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$ muni du produit scalaire précédent, soit $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$.
   Calculer $d(A, \mathcal{S}_2(\mathbb{R}))$ et $d(A, \mathcal{A}_2(\mathbb{R}))$.

Exercice de TD : 20

($\heartsuit\heartsuit$) Soit $E = \mathcal{C}^2([0,\ 1],\ \mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ (f,\ g) & \mapsto & \int_0^1 (fg + f'g') \end{array}$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.

2. Soit $F = \{f \in E \mid f(0) = f(1) = 0\}$ et $G = \{f \in E \mid f'' = f\}$.
   On pourra vérifier que $F \oplus G = E$ et que toute fonction h s'écrit : $h = f + g$ avec $g(t) = \frac{1}{\operatorname{sh} 1}(h(1) - h(0)\operatorname{ch} 1)\operatorname{sh} t + h(0)\operatorname{ch} t$
   Montrer alors que F et G sont supplémentaires orthogonaux et que $F = G^\perp$.
   Exprimer alors la projection orthogonale sur G.

3. Soit $(a,\ b) \in \mathbb{R}^2$ et $E_{a,b} = \{f \in E \mid f(0) = a \text{ et } f(1) = b\}$.
   (a) i. Trouver un élément $f_0 \in E_{a,b}$ et prouver alors que $E_{a,b} = f_0 + F$.
   ii. Donner la projection orthogonale de f_0 sur G.
   (b) Déterminer la valeur de :
   $$\inf_{f \in E_{a,b}} \int_0^1 (f^2 + f'^2)$$