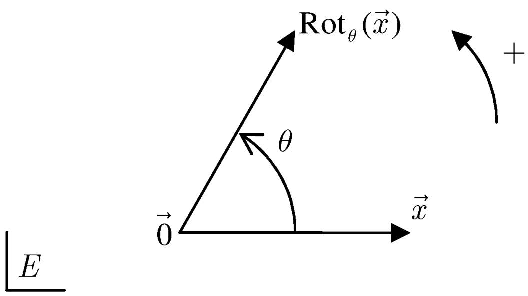
Matrices Orthogonales et Isométries vectorielles

MPSI - Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye

21 juin 2018



Dans ce chapitre, on considère un **espace euclidien** $(E, \langle ., . \rangle)$ de dimension n.

1 Les isométries vectorielles

1.1 Définitions

Définition 1 : **Isométries vectorielles**
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
On dira que u est une *isométrie vectorielle* lorsque : $\forall x \in E, \quad \|u(x)\| = \|x\|$.

On note $\mathrm{O}(E)$ l'ensemble des isométries vectorielles de E.

Remarque 1. Ainsi : un endomorphisme de E est une isométrie vectorielle si et seulement si il conserve la norme.

`Exemple 1.` $(*)$ L'identité de E est une isométrie vectorielle. (cf plus loin les symétries orthogonales)

Théorème 1 : **Groupe orthogonal**
$(\mathrm{O}(E), \circ)$ est un sous-groupe du groupe linéaire $(\mathcal{GL}(E), \circ)$.
On l'appelle le *groupe orthogonal* de E.
Les isométries vectorielles sont aussi appelées des *automorphismes orthogonaux*.

Preuve 1 : On montre que $\mathrm{O}(E)$ est une partie non vide de $\mathcal{GL}(E)$ $\begin{cases} \text{stable par la loi de composition} \\ \text{stable par symétrisation} \end{cases}$.

Remarque 2. Ce théorème signifie en particulier que :

1. La composée de deux isométries vectorielles est une isométrie vectorielle.
2. La bijection réciproque d'une isométrie vectorielle est une isométrie vectorielle.

Théorème 2 : Caractérisation par la conservation du produit scalaire
Soit $u \in \mathcal{L}(E)$.
$$u \text{ est une isométrie vectorielle } \Longleftrightarrow \forall(x,\ y) \in E^2, \quad \langle u(x), u(y)\rangle = \langle x, y\rangle$$
Ou encore, lorsque $(e_1,\ e_2, \dots,\ e_n)$ est une base de E.
$$u \text{ est une isométrie vectorielle } \Longleftrightarrow \forall(i,\ j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad \langle u(e_i), u(e_j)\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$$

Preuve 2 : Equivalence facile à démontrer en utilisant l'identité de polarisation.

Exercice : 1
$(*)$ Soit F un sous-espace vectoriel d'un espace vectoriel euclidien E et $f \in \mathcal{O}(E)$. Montrer que $f(F^\perp) = (f(F))^\perp$.

Remarque 3. En particulier, une isométrie vectorielle conserve donc d'orthogonalité.

Théorème 3 : Caractérisation à l'aide de l'image d'une bon
Soit $u \in L(E)$ et ϵ une bon de E.
$$\boxed{u \text{ est une isométrie vectorielle} \Longleftrightarrow \text{l'image de la bon } \epsilon \text{ est une bon}}$$

Preuve 3 : Soit $u \in L(E)$.
$$\begin{array}{lll} u \text{ est une isométrie vectorielle} & \Longleftrightarrow & \forall(p,\ q) \in [\![1, n]\!]^2,\ \langle u(\epsilon_p), u(\epsilon_q)\rangle = \langle \epsilon_p, \epsilon_q\rangle \\ & \Longleftrightarrow & \forall(p,\ q) \in [\![1, n]\!]^2,\ \langle u(\epsilon_p), u(\epsilon_q)\rangle = \delta_{pq} \\ & \Longleftrightarrow & u(\epsilon) \text{ bon} \end{array}$$

Remarque 4.

1. Pour que $u \in \mathcal{L}(E)$ soit une isométrie vectorielle, il suffit qu'il transforme UNE bon en une bon.
2. Si u transforme UNE bon en une bon, alors il transforme toutes les bon en bon.

Théorème 4 : Endomorphisme orthogonal induit
Si un sev F est stable par $u \in \mathcal{O}(E)$ alors :

1. u induit un endomorphisme orthogonal sur F. $\quad (u_{|F} \in \mathcal{O}(F))$
2. $F^\perp$ est aussi stable par u qui induit ainsi un endomorphisme orthogonal sur $F^\perp$.

Preuve 4 :

1. Pas de difficulté !
2. Soit $x \in F^\perp$, et $y \in F$. Il s'agit de montrer que $\langle u(x), y\rangle = 0$.
   Remarquer que $\exists z \in F$ tel que $y = u(z)$ ...

Remarque 5. Lorsque F est stable par un endomorphisme orthogonal u, alors la matrice de u dans une base e obtenue en réunissant une base de F et une base de $F^\perp$ est une matrice diagonale par blocs.

1.2 L'exemple des symétries orthogonales

Soient F et G deux sev de E tels que $E = F \oplus G$.

Rappels :

1. $\forall x \in E$, il existe donc une unique décomposition $x = x_1 + x_2$ avec $x_1 \in F$ et $x_2 \in G$.

   La *symétrie* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{par rapport à } F \\ \textit{parallèlement à } G \end{array} \right.$ est alors l'application : $s\ :\ \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & E \\ x & \mapsto & x_1 - x_2 \end{array}$.
2. On a alors : $\left\{ \begin{array}{l} F = \ker(s - \mathrm{id}_E) \\ G = \ker(s + \mathrm{id}_E) \end{array} \right.$ et la caractérisation : $s \in \mathcal{L}(E)$ est une symétrie $\Longleftrightarrow s \circ s = \mathrm{id}_E$
3. $s = 2p - Id_E$ où p est la projection sur F parallèlement à G.
4. Lorsque $\dim F < +\infty$, alors $E = F \oplus F^\perp$.

DÉFINITION 2 : **Symétrie orthogonale**
Soit F un sev de dimension finie d'un espace préhilbertien réel E.

La *symétrie* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{par rapport à } F \\ \textit{parallèlement à } F^{\perp} \end{array} \right.$ est appelée *symétrie orthogonale* par rapport à F.

Dessin

Symétrie orthogonale sur un sev F

Expression d'une symétrie orthogonale par rapport à F :

- Méthode 1 : Lorsque $F = \text{Vect}(u)$ est une droite vectorielle, on applique : $s(x) = 2\langle x, \frac{u}{\|u\|}\rangle \cdot \frac{u}{\|u\|} - x$.
- Méthode 2 : Lorsque $F = n^{\perp}$ est un hyperplan on applique les formules : $\left\{ \begin{array}{l} s(x) = 2p(x) - x \\ p(x) = x - \langle x, \frac{n}{\|n\|}\rangle \cdot \frac{n}{\|n\|} \end{array} \right.$.
- Méthode 3 : Lorsqu'on n'est pas dans l'un des cas précédents et que $F = \text{Vect}(f_1, \ \dots, \ f_p)$, on applique la méthode générale :
$$x' = s(x) \iff \left\{ \begin{array}{l} x + x' \in F \\ x - x' \in F^{\perp} \end{array} \right.$$
- Méthode 4 : Lorsque $(f_1, \ \dots, \ f_p)$ est une bon de F, on applique la formule :
$$s(x) = 2(\langle x, f_1\rangle f_1 + \langle x, f_2\rangle f_2 + \cdots + \langle x, f_p\rangle f_p) - x$$

`Exemple 2.` $(*)$ On considère un espace vectoriel euclidien E muni d'une base orthonormée $\mathcal{B} = (i, \ j, \ k)$.
Former la matrice dans $\mathcal{B}$ de la symétrie orthogonale par rapport au plan P d'équation $x = z$.

Remarque 6. Une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan (en dimension finie!) est appelée une *réflexion*.

Exercice : 2

$(*)$ Soit $u \in \mathbb{R}^{3*}$ euclidien usuel et s la réflexion par rapport à $\{u\}^{\perp}$.

1. Déterminer l'expression de $s(X)$ où $X = (x, \ y, \ z) \in \mathbb{R}^3$.
2. Donner la matrice de s dans la base canonique lorsque $u = (1, \ 0, \ 1)$.

PROPOSITION 5 : **Reconnaissance des symétries orthogonales**
Soit $s \in \mathcal{L}(E)$ avec E un espace euclidien.
On a : s est une symétrie orthogonale $\iff \left\{ \begin{array}{l} s^2 = \text{id}_E \\ \ker(s + \text{id}) \subset \big(\ker(s - \text{id})\big)^{\perp} \end{array} \right.$

Preuve 5 : Pas de difficulté.

Exercice : 3

$(**)$ Montrer qu'une symétrie vectorielle est une isométrie si et seulement si c'est une symétrie orthogonale.

On pourra donc retenir que "parmi les symétries, seules les symétries orthogonales sont des isométries".

2 Les matrices orthogonales

2.1 Définitions

DÉFINITION 3 : **Matrices orthogonales**
On dit qu'une matrice $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est *orthogonale* si et seulement si :

$$^tAA = I_n \qquad (\text{ ou } A^tA = I_n)$$

On note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ (ou encore $O(n)$) l'ensemble des matrices orthogonales à coefficients réels.

Remarque 7.

1. Une matrice orthogonale est inversible et $A^{-1} = {}^tA$.
2. Une matrice orthogonale a un déterminant égal à ± 1.

THÉORÈME 6 : **Caractérisation pratique des matrices orthogonales**
Soit $A = ((a_{ij})) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$.
Alors A est une matrice orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes $(C_1, \dots, C_n)$ forment *une base orthonormale* pour $\langle ., . \rangle$ le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$, c'est à dire :

$$\forall (p,\ q) \in [1, n]^2, \quad \boxed{\langle Cp, Cq \rangle_{usuel} = \sum_{i=1}^{n} a_{ip}a_{iq} = \delta_{p,q}}$$

Cela nous donne un moyen simple de reconnaître si une matrice est orthogonale.

Preuve 6 : On exprime la relation ${}^tA.A = I_n$ à l'aide des coefficients ou des vecteurs colonnes des matrices.

Remarque 8.

1. Comme on a aussi ${}^t({}^tA)\ {}^tA = I_n$, alors les vecteurs lignes de A forment aussi une bon.
2. Les coefficients d'une matrice orthogonale sont tous inférieurs à 1 en valeur absolue.

`Exemple 3.` $(*)$ Montrer que $A = \dfrac{1}{\sqrt{5}}\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$ est orthogonale et calculer A^{-1}.

Exercice : 4

$(**)$ Soit $A = ((a_{ij})) \in \mathcal{O}_n(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale. Montrer que $\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}\right| \leq n$

Aide : Penser à utiliser l'inégalité de Schwarz. Quel espace ? Quel Produit scalaire ? Quels vecteurs ?

THÉORÈME 7 : $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un sous-groupe de $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{R}),\ \times)$ appelé aussi le *Groupe Orthogonal*.

Preuve 7 : Pas de difficulté.

Remarque 9. $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est aussi parfois noté $O(n)$.

2.2 Matrice d'une isométrie vectorielle dans une bon

THÉORÈME FONDAMENTAL 8 : **La matrice d'une isométrie vectorielle dans une bon est orthogonale**

Soit E un espace euclidien, $u \in L(E)$.
Alors :

$$\boxed{u \text{ est une isométrie vectorielle} \iff \text{sa matrice dans une bon est orthogonale}}$$

Preuve 8 : Soit $u \in L(E)$ et A sa matrice dans une bon ϵ.
Les vecteurs colonnes C_i de la matrice A sont les coordonnées des vecteurs $u(\epsilon_i)$ dans la bon ϵ.
On a donc : $\forall (p,\ q) \in [1,n]^2 \quad \begin{cases} \langle u(\epsilon_p), u(\epsilon_q)\rangle = \langle Cp, Cq\rangle_{usuel} \\ \langle \epsilon_p, \epsilon_q\rangle = \delta_{pq} \end{cases}$.
Par conséquent :

$$\forall (p,\ q) \in [1,n]^2 \quad \begin{array}{ccc} \langle u(\epsilon_p), u(\epsilon_q)\rangle = \langle \epsilon_p, \epsilon_q\rangle & \Longleftrightarrow & \langle Cp, Cq\rangle_{usuel} = \delta_{pq} \\ u \text{ isométrie vectorielle} & \Longleftrightarrow & A \text{ matrice orthogonale} \end{array}$$

Remarque 10. Attention ! ! Le résultat précédent est faux si la base ε n'est pas orthonormale.
Considérer par exemple $\varepsilon = (\overrightarrow{i},\ 2\overrightarrow{j})$ et s la symétrie orthogonale par rapport à Vect$(1, 1)$.

COROLLAIRE 9 : **Caractérisation des matrices de passage entre bon**
Soit e une base orthonormale de E et f une base.
Soit $P = P_{e\to f}$ la matrice de passage entre ces deux bases.
Alors

$$\boxed{f \text{ est une base orthonormale} \Longleftrightarrow P \text{ est une matrice orthogonale}}$$

Preuve 9 : On considère u l'endomorphisme de E défini par $\forall k \in [\![1, n]\!],\ u(e_k) = f_k$.
Soit P la matrice de u dans la bon e. P est aussi la matrice de passage de e vers f.
D'après les théorèmes précédents : $\begin{cases} u \text{ isométrie vectorielle} \Longleftrightarrow f \text{ bon} \\ u \text{ isométrie vectorielle} \Longleftrightarrow P \text{ orthogonale} \end{cases}$ CQFD ...

Remarque 11. Si e et f sont 2 bon de E, et $P = P_{e\to f}$ alors $P^{-1} = {}^tP$.
En particulier, la formule de changement de bases s'écrit alors $A_f = {}^tPA_eP$.

Remarque 12. En conclusion, une matrice orthogonale s'interprète :

1. Soit comme la matrice d'une isométrie vectorielle dans une bon.
2. Soit comme la matrice de passage d'une bon vers une bon.

Exercice : 5

(∗∗) **Caractérisation des projections et des symétries orthogonales.**

Soit E un espace euclidien, $u \in \mathcal{L}(E)$, e une bon de E et $U = \text{Mat}_e(u)$.

1. Montrer que u est une symétrie orthogonale ssi "$U^2 = I_n$ ou ${}^tUU = I_n$" et ${}^tU = U$.
2. Montrer que u est une projection orthogonale ssi $U^2 = U$ et ${}^tU = U$.

2.3 Produit mixte

On considère un espace euclidien E muni d'un produit scalaire noté $\langle ., .\rangle$ et $\|.\|$ la norme euclidienne associée.

DÉFINITION 4 : **Orientation**
Soient e et f deux bases de E et la matrice de passage $P = P_{e\mapsto f}$ entre ces deux bases.
On dit que les deux bases e et f définissent la même orientation si et seulement si $\det(P) > 0$.

Orienter l'espace consiste à choisir une base de référence e.
Les bases de même orientation que e sont dites *directes* et les autres *indirectes*.

`Exemple 4.` Si $e = (e_1,\ e_2,\ e_3)$ est la base canonique de $\mathbb{R}^3$, et si l'on choisit l'orientation définie par cette base, alors la base $f = (e_2,\ e_3,\ e_1)$ est directe alors que la base $g = (e_1,\ e_3,\ e_2)$ est indirecte.

Remarque 13. Lorsque l'on dit se placer dans "$\mathbb{R}^n$ euclidien usuel orienté", on dit que l'espace $\mathbb{R}^n$ est muni du produit scalaire usuel, de sa base canonique (qui est donc une bon), et que cette base est considérée comme directe.

Exercice : 6

(∗∗) Montrer que le procédé d'orthonormalisation de Schmidt ne change pas l'orientation de la base.

Proposition 10 : **Matrice de passage entre deux bon**
Soient $e = (e_1, \ldots, e_n)$ et $f = (f_1, \ldots, f_n)$ deux bases orthonormales d'un espace euclidien E.
Notons $P = P_{e \mapsto f}$ la matrice de passage entre les bases e et f.
Alors :

1. $\det(P) = \pm 1$;
2. Si les bon ont même orientation, alors $\det(P) = +1$.

Preuve 10 : Il suffit de remarquer que P est une matrice orthogonale.

Définition 5 : **Produit mixte**
Soit E un espace euclidien orienté de dimension n et ε une *bon directe*.
Soient $(x_1, \ldots, x_n)$ une famille de n vecteurs de E.
On appelle produit mixte de ces n vecteurs, le scalaire

$$[x_1, \ldots, x_n] = \det_\varepsilon(x_1, \ldots, x_n)$$

Il est indépendant de la bon directe choisie.

Preuve : Il suffit d'exprimer le déterminant de $(x_1, \ldots, x_n)$ dans deux bon directes différentes.

Remarque 14.

1. Parfois, le produit mixte se note aussi : $[x_1, \ldots, x_n] = \mathrm{Det}(x_1, \ldots, x_n)$.
2. Le produit mixte d'une bond est égal à 1.

Corollaire 11 : **Reconnaissance d'une base directe**
Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, , \varepsilon_n)$ une famille de n vecteurs de E euclidien de dimension n.

$$\varepsilon \text{ est une base directe } \iff [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, , \varepsilon_n] > 0$$

Preuve 11 : Immédiat !

Remarque 15.

1. Dans $\mathbb{R}^2$, le produit mixte $[x, y]$ représente l'aire algébrique du parallélogramme défini par x et y.
2. Dans $\mathbb{R}^3$, le produit mixte $[x, y, z]$ représente le volume algébrique du parallélépipède défini par x, y et z.

Interprétation dans $\mathbb{R}^2$ et dans $\mathbb{R}^3$

Remarque 16. **Formule donnant un produit mixte :**
Soit $(x_1, \ldots, x_n) \in E^n$.
Alors $[x_1, \ldots, x_n] = \det(A)$ où $A = (\langle x_j, \varepsilon_i \rangle) \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et ε une bon directe de E,

Définition 6 : **Orientation d'un hyperplan affine**
Dans un espace orienté, le choix d'un vecteur normal permet d'orienter un hyperplan affine.
En effet, E est orienté et si n est un vecteur normal à un hyperplan affine $\mathcal{H}$ de E, alors on dira qu'une base $h = (h_1,\ \dots,\ h_{n-1})$ de $\overrightarrow{H}$ est directe ssi :

$$[h_1,\ \dots,\ h_{n-1},\ n] > 0$$

En orientant $\mathcal{H}$ par $-n$, la base h devient une base indirecte de $\overrightarrow{H}$.

Théorème 12 : **Effet d'une Application Linéaire**
Soit E un $\mathbb{K}$-ev de dimension n et $\varphi \in \mathcal{L}(E)$.
On a alors :

$$\forall (x_1,\ \dots,\ x_n) \in E^n, \quad [\varphi(x_1),\ \dots,\ \varphi(x_n)] = \det \varphi . [x_1,\ \dots,\ x_n]$$

Preuve 12 : On peut remarquer que $(x_1,\ \dots,\ x_n) \mapsto [\varphi(x_1),\ \dots,\ \varphi(x_n)]$ est une forme n-linéaire alternée.

2.4 Le produit vectoriel (HP)

Ici, on se place dans E euclidien de dimension 3.

Définition 7 : Soient $a,\ b \in E$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} E & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & [a,\ b,\ x] \end{array}$.

1. φ est une forme linéaire et il existe donc $c \in E$ unique tel que : $\forall x \in E,\ \varphi(x) = \langle c, x\rangle$.
2. Ce vecteur c est appelé le *produit vectoriel de a et b* et est noté $c = a \wedge b$.

On a alors :

$$\boxed{\forall x \in E, \quad [a,\ b,\ x] = \langle a \wedge b, x\rangle}$$

Cette définition permet de démontrer facilement les propriétés suivantes :

P_1 : L'application $\varphi : \begin{array}{ccc} E^2 & \longrightarrow & E \\ (x,\ y) & \mapsto & x \wedge y \end{array}$ est linéaire par rapport à chaque variable.

P_2 : Antisymétrie : $y \wedge x = -x \wedge y$.

P_3 : x et y sont colinéaires $\iff x \wedge y = 0$.

P_4 : Si $(x,\ y)$ est un système libre, alors
(a) $x \wedge y \neq 0$
(b) $x \wedge y$ est orthogonal à x et à y.
(c) $(x,\ y,\ x \wedge y)$ est une base directe de E.

P_5 : Si $x \perp y$ alors $\|x \wedge y\| = \|x\|.\|y\|$.

P_6 : Si $(x,\ y)$ est un système orthonormé de E, alors $(x,\ y,\ x \wedge y)$ est une bon directe de E.

P_7 : Si $\left(\overrightarrow{i}, \overrightarrow{j}, \overrightarrow{k}\right)$ est une base orthonormée directe (bon directe) alors $\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{i} \wedge \overrightarrow{j} = \overrightarrow{k} \\ \overrightarrow{j} \wedge \overrightarrow{k} = \overrightarrow{i} \\ \overrightarrow{k} \wedge \overrightarrow{i} = \overrightarrow{j} \end{array}\right.$. *(et réciproquement !)*

P_8 : Dans une bon directe : $\overrightarrow{x}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \wedge \overrightarrow{y}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ -(x_1y_3 - x_3y_1) \\ x_1y_2 - x_2y_1 \end{pmatrix}$.

P_9 : Formule du double produit vectoriel : $x \wedge (y \wedge z) = \langle x, z\rangle.y - \langle x, y\rangle.z$

P_{10} : Identité de Lagrange : $\langle x, y\rangle^2 + \|x \wedge y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2$.

3 Classification des isométries vectorielles et des matrices orthogonales

3.1 Partition du groupe des matrices orthogonales :

Les définitions suivantes sont valables pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition 8 : $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ **et** $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$
Soit une matrice orthogonale $A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Alors $\det(A) = \pm 1$ et on dit que :

1. A est une *matrice orthogonale positive* lorsque $\det(A) = +1$
2. A est une *matrice orthogonale négative* lorsque $\det(A) = -1$

On définit alors les sous-ensembles de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ suivants :

$$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = +1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{O}_n^-(\mathbb{R}) = \{A \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \mid \det A = -1\}$$

$\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est appelé le groupe *spécial orthogonal*.
C'est en effet, un sous-groupe du groupe orthogonal $(\mathrm{O}_n(\mathbb{R}), \times)$.

Remarque 17. Les ensembles $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ et $\mathrm{O}_n^-(\mathbb{R})$ sont parfois plus simplement notés : $\mathrm{O}(n)$, $\mathrm{SO}(n)$ et $\mathrm{O}^-(n)$.

3.2 Partition du groupe des isométries vectorielles :

Définition 9 : **Isométries positives et négatives**
Soit une isométrie $u \in \mathrm{O}(E)$ d'un espace euclidien orienté E.

Alors $\det(u) = \pm 1$ et on dit que :

1. u est une *isométrie positive* de E lorsque $\det(u) = +1$
2. u est une *isométrie négative* lorsque $\det(u) = -1$.

On définit alors les sous-ensembles de $\mathrm{O}(E)$ suivants :

$$\mathrm{SO}(E) = \{u \in \mathrm{O}(E) \mid \det u = +1\} \quad \text{et} \quad \mathrm{O}^-(E) = \{u \in \mathrm{O}(E) \mid \det u = -1\}$$

L'ensemble $\mathrm{SO}(E)$ est un sous-groupe du groupe orthogonal $(\mathrm{O}(E), \circ)$.

Remarque 18.
Les isométries positives conservent l'orientation des bases tandis que les isométries négatives les inversent.

Remarque 19. Si ε est une **base orthonormale** de E et si $\begin{cases} u \in L(E) \text{ avec} \\ U = \mathrm{Mat}_\varepsilon(u) \end{cases}$, alors : $\begin{cases} u \in O(E) \Longleftrightarrow U \in O_n(\mathbb{R}) \\ u \in \mathrm{SO}(E) \Longleftrightarrow U \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R}) \end{cases}$

4 Etude des isométries vectorielles en dimension 2.

On considère un espace euclidien orienté E_2 de dimension 2.
Nous verrons au cours des études menées, qu'il sera préférable de se placer dans une base orthonormée directe.

4.1 Les matrices orthogonales de taille 2x2

On commence par s'intéresser à la forme et aux propriétés des matrices de $SO_2(\mathbb{R})$.

Théorème 13 : **Etude de $SO_2(\mathbb{R})$**

1. Les matrices de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ sont de la forme : $R_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$, avec $\theta \in]-\pi,\ \pi]$)
2. $R_\theta \times R_{\theta'} = R_{\theta+\theta'}$ ($\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ est un sous-groupe commutatif)
3. $R_\theta^{-1} = R_{-\theta}$

Preuve 13 :

1. Soit A une matrice quelconque de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.
   On exprime le fait qu'elle appartient à $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\begin{cases} {}^tA = A^{-1} \\ \det A = 1 \end{cases}$.
2. Egalité facile à vérifier.
3. Conséquence immédiate de la propriété précédente.

Remarque 20. L'application : ϕ : $\begin{array}{ccc} (\mathbb{R},+) & \longrightarrow & (\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}),\times) \\ \theta & \mapsto & R_\theta \end{array}$ est un morphisme de groupes de noyau $2\pi\mathbb{Z}$.

Théorème 14 : **Etude de $O_2^-(\mathbb{R})$**

1. L'application : Δ : $\begin{array}{ccc} \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R}) \\ X & \mapsto & PX \end{array}$ est une bijection (avec $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$).
2. Les matrices de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$ sont les matrices de la forme : $S_{\frac{\theta}{2}} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$

Preuve 14 :

1. Remarquons que $P^2 = I_2$. La démonstration ne pose alors pas de difficulté.
2. Conséquence immédiate du 1.

4.2 Les isométries vectorielles positives

Théorème Fondamental 15 : **Nature des Isométries vectorielles positives**

Soit E un espace euclidien de dimension 2 orienté et $u \in \mathrm{SO}(E)$ une isométrie vectorielle positive.
Alors il existe **un unique** $\theta \in]-\pi,\ \pi]$ tel que pour *toute bon directe ε* de E,

$$Mat_\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

On dit que u est la *rotation vectorielle* d'angle θ et on note $u = r_\theta$.

Si $(i,\ j)$ est une bon directe de E, et si r est la rotation d'angle θ, alors $\begin{cases} r(i) = \cos\theta.i + \sin\theta.j \\ r(j) = -\sin\theta.i + \cos\theta.j \end{cases}$.

Preuve 15 :

1. Nous savons que dans une bon, la matrice d'une rotation est un élément A_θ de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$.
2. Il s'agit de montrer que θ est indépendant de la bon choisie. La matrice de passage P d'une bon directe vers une bon directe est aussi une matrice de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ (car les deux bases ont la même orientation).
   On a donc $A_{\theta'} = P^{-1}A_\theta P = P^{-1}PA_\theta = A_\theta$. On en déduit alors que $\theta' = \theta$.

Dessin

Remarque 21.

1. Nous venons pour la première fois, de définir dans le plan vectoriel euclidien la notion d'angle.
   Un angle caractérise une rotation vectorielle donnée.
2. La matrice de passage d'une bon directe vers une bon directe est une matrice de $SO_2(\mathbb{R})$, ce qui signifie qu'on passe d'une bond à une autre bond par une rotation.
3. L'image d'une bon directe par une rotation est une bon directe.

`Exemple 5.` $(*)$ Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien usuel orienté. On note $b = (\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix})$ et e la base canonique.

1. Déterminer la matrice de r, la rotation d'angle $\dfrac{\pi}{4}$ dans e puis dans la base b.
2. Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base e est $A = \dfrac{1}{5}\begin{pmatrix}4 & 3\\-3 & 4\end{pmatrix}$.
3. Reconnaître l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base b est $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}0 & -2\\1 & 2\end{pmatrix}$.

Méthodes :

- Pour trouver la matrice de la rotation r_θ d'angle θ :

  On peut se placer dans une bond ε dans laquelle nous avons $\mathrm{Mat}_\varepsilon\, r_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}$, puis déterminer la matrice dans la base d'origine à l'aide de la formule de changement de bases.

- Pour reconnaître une rotation :

  On s'assure que la matrice donnée est une matrice orthogonale de déterminant 1.
  On vérifie alors que cette matrice est la matrice de l'application étudiée $\boxed{\text{dans une bond}}$.
  On a alors une rotation dont l'angle est donné par les coefficients de la matrice.

Exercice : 7

$(*)$ Soit $(e_1,\ e_2)$ une base quelconque d'un plan vectoriel euclidien orienté.
Soit r une rotation vectorielle de E, de matrice A dans la base $(e_1,\ e_2)$.
Pour toute rotation vectorielle ρ, montrer que la matrice de r dans la base $(\rho(e_1),\ \rho(e_2))$ est encore A.

Proposition 16 : **Expression complexe d'une rotation**
On se place ici dans le plan complexe, c'est à dire dans le $\mathbb{R}$-ev $\mathbb{C}$ muni de la bond $(1,\ i)$.

1. L'endomorphisme $\varphi : \begin{array}{ccc}\mathbb{C} & \longrightarrow & \mathbb{C}\\ z & \mapsto & e^{i\theta}z\end{array}$ admet pour matrice R_θ dans la bond $\{1,\ i\}$.

   Ainsi, la rotation d'angle θ a pour expression complexe : $z' = e^{i\theta}z$.

2. $\psi : \begin{array}{ccc}\mathbb{U} & \longrightarrow & SO(E)\\ e^{i\theta} & \mapsto & R_\theta\end{array}$ est un isomorphisme de groupes.

Preuve 16 : Pas de difficulté.

Remarque 22. On aurait pu effectuer démontrer ce résultat un raisonnement plus directe par analyse synthèse : "Soit u la rotation d'angle θ dans le plan complexe. Notons $\begin{cases} u = (x,\ y) \\ r(u) = (x',\ y') \end{cases}$ et $\begin{cases} z = x + iy \\ z' = x' + iy' \end{cases}$ et cherchons alors l'expression de z' en fonction de z..."

THÉORÈME 17 : **Formules donnant l'angle d'une rotation**
Soit E un espace euclidien et $r \in \mathcal{O}_2(E)$. Soit $a \in E$ non nul.
Alors l'angle de la rotation r est donné par les formules suivantes :

1. $\cos\theta = \dfrac{\langle a, r(a)\rangle}{\|a\|^2}$
2. $\sin\theta = \dfrac{[a, r(a)]}{\|a\|^2}$

Preuve 17 : Il suffit d'effectuer les calculs en prenant $a = x_a.i + y_a.j$ avec $(i,\ j)$ est une bon directe.

Remarque 23.
1. On utilisera les formules précédentes lorsqu'on ne connaît pas la matrice de la rotation dans une bon.
2. Les formules précédentes s'écrivent $\cos\theta = \langle a, r(a)\rangle$ et $\sin\theta = [a, r(a)]$ dans le cas où $\|a\| = 1$.

THÉORÈME 18 : **Angle de deux vecteurs**
Soit E un espace euclidien orienté de dimension 2 et $(a,\ b) \in E^2$ deux vecteurs non-nuls.
On définit les vecteurs : $u = \dfrac{a}{\|a\|}$, $v = \dfrac{b}{\|b\|}$. Alors :

$$\boxed{\text{Il existe une unique rotation } r \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) \text{ telle que } v = r(u)}$$

Si θ est l'angle de la rotation $\theta \in [0, 2\pi[$, on note $\boxed{\widehat{(a,\ b)} = \theta}$ l'*angle orienté* des vecteurs $(a,\ b)$.

Preuve 18 : Soient $e = (u,\ u')$ et $e' = (v,\ v')$ les bon directes construites à partir de u et v.
1. Une telle rotation existe bien : il suffit de prendre la rotation dont la matrice dans e est la matrice de passage de e vers e'.
2. Supposons qu'il existe deux rotations r_1 et r_2 telles que $r_1(u) = v$ et $r_2(u) = v$.
   On exprime alors les relations de $r_1(u) = v$ et $r_2(u) = v$ dans la bon directe $(u,\ u')$.

Remarque 24. Cette définition permet de retrouver les propriétés bien connues sur les angles de vecteurs :

1. $(\vec{u},\ \vec{v}) = -(\vec{v},\ \vec{u})$
2. $(\vec{u},\ \vec{v}) + (\vec{v},\ \vec{w}) = (\vec{u},\ \vec{w}) \quad [2\pi]$

COROLLAIRE 19 : L'angle orienté $\widehat{(a,\ b)}$ est donné par les formules :

1. $\cos\theta = \dfrac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\|b\|}$
2. $\sin\theta = \dfrac{[a, b]}{\|a\|\|b\|}$

Preuve 19 : Il suffit d'effectuer le calcul en utilisant les formules donnant l'angle d'une rotation.

Remarque 25.
1. Les formules précédentes s'écrivent $\cos\theta = \langle a, b\rangle$ et $\sin\theta = [a, b]$ dans le cas où $\|a\| = \|b\| = 1$.
2. Pour trouver $\theta = \widehat{(a,\ b)}$, on calcule $\cos\theta$ puis on trouve le signe du sinus en calculant $[a,\ b]$.
3. Ces formules permettent aussi d'exprimer le produit scalaire et le produit mixte en fonction de l'angle :
   (a) $\langle a, b\rangle = \|a\|\|b\| \cos\widehat{(a,\ b)}$
   (b) $[a,\ b] = \|a\|\|b\| \sin\widehat{(a,\ b)}$

`Exemple 6.` $(*)$ Dans $\mathbb{R}^2$ euclidien orienté usuel, quel est l'angle entre les vecteurs $U = (1, 1)$ et $V = (0, 1)$?

4.3 Les isométries vectorielles négatives

Théorème 20 : **Isométries vectorielles négatives**

Soit E un espace euclidien de dimension 2 orienté, $\boxed{\varepsilon \text{ une bon}}$ (directe ou pas) de E et $u \in \mathrm{O}_2^-(E)$ une isométrie vectorielle négative. Alors il existe **un unique** $\theta \in]-\pi,\ \pi]$ tel que :

$$Mat_\varepsilon(u) = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix} = S_{\frac{\theta}{2}}$$

Preuve 20 : En effet, la matrice de u dans une bon est une matrice de $\mathrm{O}_2^-(\mathbb{R})$.

Remarque 26. ⚠ Contrairement au cas des rotations, l'angle θ dépend ici de la bon (directe ou pas) choisie : ce n'est donc pas une caractéristique de u.

Théorème Fondamental 21 : **Nature des isométries vectorielles négatives**
Les isométries vectorielles vectorielles négatives d'un espace euclidien orienté E de dimension 2 sont les réflexions de E.
Soit $s \in \mathcal{O}^-(E)$ et ε une bon (directe ou pas).
Dans la base ε, il existe $\theta \in]-\pi,\ \pi]$ tel que la matrice de s soit de la forme $S_{\frac{\theta}{2}}$.

$$s \text{ est alors la réflexion d'axe Vect} \begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}.$$

Preuve 21 : Soit s une isométrie vectorielle négative de E.
Sa matrice dans une bon est de la forme $S_{\frac{\theta}{2}}$.

1. Comme $S_{\frac{\theta}{2}}.S_{\frac{\theta}{2}} = I_2$, s est une symétrie vectorielle.
2. Pour prouver que la symétrie s est orthogonale : (on traitera le cas $\theta = 0$ à part)
   (a) On peut prouver directement que $\ker(s - \mathrm{id}) \perp \ker(s + \mathrm{id})$ en utilisant le fait que s est une symétrie et une isométrie vectorielle.
   (b) On peut aussi remarquer que $S_{\frac{\theta}{2}}$ est symétrique. (voir exercice du cours sur les symétries orthogonales)
3. On montre enfin que le support $\ker(s - \mathrm{id}) = \mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$.
4. Réciproquement, toutes les réflexions de E_2 sont des isométries vectorielles négatives.

Dessin

`Exemple 7.` $(*)$ On munit $\mathbb{R}^2$ de sa structure euclidienne usuelle.
Caractériser l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice dans la base canonique est $A = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$

Exercice : 8
$(**)$ Soient u et v deux vecteurs de E_2 tels que $\|u\| = \|v\|$.
Montrer qu'il existe une unique réflexion telle que $s(u) = v$.

Aide : Vous pourrez procéder par "analyse / synthèse".

Exercice : 9

($*$) Déterminer la nature et les éléments caractéristiques de la composée de deux éléments de $\mathcal{O}(E_2)$.

4.4 Conclusion

En dimension 2, les isométries vectorielles u sont : $\begin{cases} \text{Soit des rotations (si } u \in \mathrm{SO}_2(E)) \\ \text{Soit des réflexions (si } u \in \mathrm{O}_2^-(E)) \end{cases}$

Si ε est une bon directe, alors :

1. La matrice dans ε d'une rotation r est un élément de $\mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ de la forme R_θ avec θ $\boxed{\text{indépendant de } \varepsilon}$.
2. La matrice dans ε d'une réflexion s est un élément de $O_2^-(\mathbb{R})$ de la forme $S_{\frac{\theta}{2}}$ avec θ dépendant de ε.
   s est alors la réflexion d'axe $\mathrm{Vect}\begin{pmatrix} \cos\frac{\theta}{2} \\ \sin\frac{\theta}{2} \end{pmatrix}$ (que l'on trouve en recherchant $\ker(s - \mathrm{id})$).

Feuille d'exercices MPSI : Les isométries vectorielles

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs ♡ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs ♡ correspond à la difficulté des exercices.

I] Matrices orthogonales

1. Une matrice A est orthogonale ssi elle vérifie la relation ${}^tAA = I_n$.
2. On reconnaît une matrice orthogonale en vérifiant que ses colonnes formes une bon pour le produit scalaire usuel de $\mathbb{R}^n$.

Exercice de TD : 1

(♡) Déterminer les inverses des deux matrices suivantes : $A = \dfrac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & -1 \\ 0 & 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$.

Exercice de TD : 2

($**$) Soit A une matrice antisymétrique d'ordre n, à coefficients réels.
Montrer que :

1. $A - I_n$ est inversible (cf un exercice traité dans le cours sur les matrices),
2. $M = (A + I_n)(A - I_n)^{-1}$ est orthogonale.

Exercice de TD : 3

($**$) $\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ est ici muni de son produit scalaire usuel. Soit $A \in \mathfrak{M}_n(\mathbb{R})$ et $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & MA \end{array}$.

Prouver que : $\varphi \in O(\mathfrak{M}_n(\mathbb{R})) \Longleftrightarrow A \in O_n(\mathbb{R})$.

En est-il de même pour l'application $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) & \longrightarrow & \mathfrak{M}_n(\mathbb{R}) \\ M & \mapsto & A^{-1}MA \end{array}$?

II] Isométries vectorielles

Connaître les 4 caractérisations des isométries vectorielles :
Un endomorphisme de E est une isométrie vectorielle

1. ssi elle conserve la norme
2. ssi elle conserve le produit scalaire
3. ssi elle transforme une bon en une bon.
4. ssi sa matrice dans une bon est une matrice orthogonale.

Exercice de TD : 4

($\heartsuit$) Soit F un sev de E un espace euclidien, p la projection orthogonale sur F et u et v deux isométries respectives de F et $F^{\perp}$.
Montrer que l'endomorphisme de E défini par $\forall x \in E,\ f(x) = u(p(x)) + v(x - p(x))$ est une isométrie.

Exercice de TD : 5

($**$) Montrer qu'un endomorphisme f de E qui commute avec toutes les symétries orthogonales est une homothétie.
Pour cela, vous montrerez que pour tout $x \in E$, on a $f(x)$ et x colinéaires.
En déduire l'ensemble des endomorphismes qui commutent avec toutes les isométries vectorielles.

Exercice de TD : 6

($**$) Soit E un espace euclidien et $f\ :\ E \mapsto E$ une application.
Justifier l'équivalence suivante : $f \in \mathcal{O}(E) \Longleftrightarrow \forall (x,\ y) \in E^2,\ \langle f(x), f(y)\rangle = \langle x, y\rangle$.

Exercice de TD : 7

($\heartsuit\heartsuit$) Soit E un espace euclidien et $f \in O(E)$.

1. Prouver que $\mathrm{Im}(f - \mathrm{id}) = (\ker(f - \mathrm{id}))^{\perp}$.
2. On note p la projection orthogonale sur $\ker(f - \mathrm{id})$ et $p_n = \dfrac{1}{n}(\mathrm{id} + f + \cdots + f^{n-1})$.
   Montrer que pour tout $x \in E$, on a $\|p_n(x) - p(x)\| \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$.

Exercice de TD : 8

($\heartsuit\heartsuit - \heartsuit\heartsuit\heartsuit$) Soient E un espace euclidien de dimension supérieure à 2 et u un vecteur non nul de E.
Pour tout réel non nul fixé α, on considère l'endomorphisme f_u de E défini par : $\forall x \in E,\ f_u(x) = x + \alpha\langle u, x\rangle u$.

Définition 10 : Soit $f \in \mathcal{L}(E)$.

1. On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une *valeur propre* de f si il existe $x \in E$ non nul tel que $f(x) = \lambda.x$
2. On dit que x est un *vecteur propre* de f associé à la valeur propre λ si x est non nul et $f(x) = \lambda.x$.
3. L'ensemble E_λ des vecteurs propres associés à une valeur propre λ, union $\{0\}$ est un sev de E appelé le *sous-espace propre* de f associé à la valeur propre λ.
4. Les sous-espaces propres d'un endomorphisme sont en somme directe.

1. Calculer $f_u(u)$. Calculer $f_u(v)$ quand v est un vecteur orthogonal à u.
   En déduire les valeurs propres et les sous-espaces propres de f_u.
2. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur u et α pour que f_u soit une isométrie vectorielle.
   Dans ce cas, interpréter f_u géométriquement.
3. Désormais E est l'espace euclidien orienté $\mathbb{R}^3$, $\mathcal{B} = (i,\ j,\ k)$ une base orthonormée directe de E.
   Pour tout vecteur unitaire u de E, on considère l'endomorphisme f_u de E défini par : $\forall x \in E,\ f_u(x) = x - 2\langle u, x\rangle u$.
   Soient $u = k$ et $u' = (-\sin q)j + (\cos q)k$ (q est un réel donné).
   Ecrire la matrice dans la base $\mathcal{B}$ de chacun des endomorphismes : f_u, $f_{u'}$ et $f_u \circ f_{u'}$.
   Interpréter géométriquement $f_u \circ f_{u'}$.
4. Ce dernier résultat est-il généralisable au cas de deux vecteurs unitaires u et u' quelconques ? (on évitera les calculs)

Exercice de TD : 9

($\heartsuit\heartsuit$) Soient E un espace euclidien et a un vecteur unitaire de E.

Pour tout réel fixé α, on considère l'endomorphisme f_α de E défini par : $\forall x \in E,\ f_\alpha(x) = x + \alpha\langle a, x\rangle a$.

1. Montrer que $\{f_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ est stable pour le produit de composition et observer que f_α et f_β commutent.
2. Calculer f_α^p pour $p \in \mathbb{N}$.
3. Montrer que f_α est bijective si et seulement si $\alpha \neq -1$. Quelle est la nature de f_{-1} ?
4. Montrer que $f_\alpha \in \mathcal{O}(E) \iff \alpha = 0$ ou $\alpha = -2$. Quelle est la nature de f_{-2} ?

Exercice de TD : 10

($*$) On considère $\mathbb{R}^4$ muni de sa structure euclidienne canonique et F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ défini par $F = \{(x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = x - y + z - t = 0\}$.

1. Déterminer une base orthonormale du supplémentaire orthogonal de F.
2. Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la projection orthogonale sur F.
3. Ecrire la matrice dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$ de la symétrie orthogonale par rapport à F.
4. Calculer $d(u,\ F)$ où $u = (1,\ 2,\ 3,\ 4)$.

Exercice de TD : 11

($*$) On considère $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel et F défini par : $F = \{(x,\ y,\ z,\ t) \in \mathbb{R}^4,\ x + y + z + t = 0$ et $x + 2y + 3z + 4t = 0\}$.

1. Déterminer une bon de F.
2. Déterminer la matrice de la symétrie orthogonale par rapport à F.

III] Produit Mixte

Le produit mixte de n vecteurs est la valeur donnée par le déterminant de ces n vecteurs dans une bond.

Exercice de TD : 12

($\heartsuit\heartsuit$) Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.
Etant donné $f \in \mathcal{L}(E)$, simplifier $\theta(x,\ y,\ z) = [f(x),\ y,\ z] + [x,\ f(y),\ z] + [x,\ y,\ f(z)]$.
On pourra reconnaître une forme n-linéaire alternée.

Exercice de TD : 13

($\heartsuit\heartsuit$) **Inégalité de Hadamard**
Soit $x_1, \ldots, x_n$ des vecteurs d'un espace euclidien E de dimension n. Prouver que :

$$[x_1,\ \ldots,\ x_n] \leq \|x_1\|\|x_2\|\ldots\|x_n\|$$

Dans quel(s) cas a-t-on l'égalité ?

Aide : on pourra utiliser le procédé d'orthogonalisation de Schmidt.

IV] Les automorphismes orthogonaux en dimension 2

1. En dimension 2 :
   - les isométries directes (ou positive) sont les rotations vectorielles (c'est un groupe pour la composition)
   - les isométries indirectes (ou négatives) sont les réflexions.
2. L'angle d'une rotation est donné par son cosinus $\cos\alpha = \frac{\langle x, r(x)\rangle}{\|x\|^2}$ et le signe de $[x,\ r(x)]$.
3. L'angle entre deux vecteurs est donné par son cosinus $\cos\alpha = \frac{\langle a, b\rangle}{\|a\|\|b\|}$ et le signe de $[a,\ b]$.
4. La matrice de la rotation d'angle α dans une bond est $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$.
   On peut alors retrouver l'angle α connaissant cette matrice.

Exercice de TD : 14

($\heartsuit$) Dans le plan euclidien usuel orienté rapporté à une bon directe $(i,\ j)$.
Déterminer une mesure de l'angle $(u,\ v)$ lorsque $\left\{ \begin{array}{l} u = -2i + j \\ v = i + 3j \end{array} \right.$.

Exercice de TD : 15

($\heartsuit$) On se place $\mathbb{R}^2$ euclidien usuel orienté.

Soit r l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ dont la matrice est $A = \begin{pmatrix} 7 & 25 \\ -2 & -7 \end{pmatrix}$ dans la base $\left\{ \begin{array}{l} u1 = (1,\ 1) \\ u2 = (3,\ 4) \end{array} \right.$.

Montrer que r est une rotation vectorielle dont on déterminera l'angle.

Exercice de TD : 16

($*$) On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ affine euclidien usuel orienté.

1. Déterminer une mesure de l'angle $(\overrightarrow{u},\ \overrightarrow{v})$ avec $\left\{ \begin{array}{l} \overrightarrow{u} = (4,\ 3) \\ \overrightarrow{v} = (5,\ 12) \end{array} \right.$.
2. Calculer une mesure de l'angle des deux droites D et Δ, avec $\left\{ \begin{array}{l} D : 3x - 4y = -5 \\ \Delta : 12x - 5y = 2 \end{array} \right.$.
3. Préciser une mesure de l'angle de droites D et Δ avec $D : y = 2x + 1$ et $\Delta : y = 3x - 4$.
   On impose ici de passer par les angles que font D et Δ avec $x'Ox$.

Exercice de TD : 17

($\heartsuit$) On se place dans le plan $\mathbb{R}^2$ euclidien usuel orienté.

Déterminer l'expression analytique $M(x, y) \mapsto M'(x',\ y')$ de :

1. La rotation r d'angle $\pi/6\ [2\pi]$ et de centre $\Omega(3,\ 1)$.
2. La projection orthogonale p sur la droite D d'équation $3x - 4y + 5 = 0$.
3. La symétrie orthogonale s par rapport à la droite D d'équation $3x - 4y + 5 = 0$.

Exercice de TD : 18

($* * *$) On se place $\mathbb{R}^2$ euclidien usuel orienté. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $\mathfrak{M}_2(\mathbb{R})$.

On suppose que $-2 < \mathrm{Tr}(A) < 2$ et $\det(A) = 1$.

Montrer que A est la matrice d'une rotation vectorielle dans une base $(\varepsilon_1,\ \varepsilon_2)$ de $\mathbb{R}^2$.

Le résultat subsiste-t-il si $\mathrm{Tr}(A) = \pm 2$?

Indications :

Après une analyse, on posera $a + d = 2\cos\theta$, avec $0 < \theta < \pi$.

On montrera que $bc \neq 0$, on prendra $\varepsilon_1 = (1,\ 0)$ et on cherchera ε_2.

Exercice de TD : 19

($\heartsuit\heartsuit$) Soit E un plan euclidien orienté, r une rotation de E et s une réflexion de E.

Calculer $s \circ r \circ s$ et $r \circ s \circ r$.