Probabilités sur un univers fini

MPSI Prytanée National Militaire

Pascal Delahaye - D'après le manuel "Mathématiques tout-en-un" MPSI

21 juin 2018

Définition 1 : **Expérience aléatoire**
Une expérience ("action débouchant sur un résultat") sera dite *aléatoire* lorsqu'il y a plusieurs *issues* (ou *résultats*) possibles qu'il est impossible de prévoir.
Attention, ne pas être capable de prévoir le résultat d'une expérience ne signifie pas que tous les résultats ont la même probabilité d'apparaître...

La branche des mathématiques qui modélise les phénomènes aléatoires s'appelle le *calcul des probabilités*.

1 Expérience aléatoire, événements, loi de probabilité

1.1 Modèlisation de l'expérience aléatoire

Lors de la réalisation d'une expérience aléatoire, on est amené à choisir successivement :

1.1.1 Un univers Ω

Définition 2 : **Univers associé à une expérience aléatoire**
Il s'agit de l'ensemble de toutes les issues possibles de l'expérience.

Remarque 1. On distingue 3 situations donnant lieu à des théories de probabilités distinctes :

1. Le cas où l'univers Ω est fini : c'est ce qui fait l'objet du programme de MPSI.
2. Le cas où l'univers Ω est dénombrable : ce cas est traité en deuxième année
3. Le cas où l'univers est infini non dénombrable : hors-programme en CPGE scientifique.

"Dans tout ce chapitre, on considère que Ω est un ensemble fini"

Remarque 2. Remarquons que l'univers est fonction de l'idée de modélisation a priori que l'on se fait de l'expérience. Si, lors du lancer d'une pièce de monnaie on considère usuellement qu'il y a deux issues "PILE" et "FACE", rien n'empêche d'en rajouter une troisième, par exemple "TRANCHE". C'est à chacun (ou à chaque énoncé) de le définir. À défaut, on considère tacitement qu'il s'agit de l'univers usuellement utilisé dans telle ou telle situation.

`Exemple 1.` Univers usuellement utilisés :

1. On lance un dé et on regarde le numéro de la face obtenue : $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
2. On lance une pièce de monnaie : $\Omega = \{P; F\}$
3. On lance deux pièces de monnaie : $\Omega = \{PP; PF; FP; FF\}$
4. On lance deux dés : $\Omega = \{(i,\ j) \mid 1 \leq i \leq 6 \text{ et } 1 \leq j \leq 6\}$.

Remarquons que l'univers dépend surtout de la façon de voir les résultats.
Ainsi :

1. Si on lance deux dés et qu'on s'intéresse au produit P des deux numéros obtenus, alors on pourra choisir :
$$\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 8; 9; 10; 12; 15; 16; 18; 20; 24; 25; 30; 36\}$$
2. Si on lance un dé et on s'intéresse à la parité du chiffre obtenu alors on pourra choisir : $\Omega = \{P; I\}$

1.1.2 Les événements

Définition 3 : **Evénement**
Dans le cas d'un univers fini Ω, les événements de Ω correspondent aux parties de l'univers Ω.

Remarque 3. Dans le cas d'un univers infini, les événements peuvent seulement correspondre à un sous-ensemble des parties de Ω.

`Exemple 2.`

1. On lance deux dés et on regarde la somme des résultats obtenus.
   On peut alors par exemple s'intéresser aux deux événements :
   — $E = \{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$ qui peut se décrire par la phrase "la somme obtenue est un nombre pair".
   — $F = \{7; 8; 9; 10; 11; 12\}$ qui peut se décrire par "la somme obtenue est strictement plus grande que 6".

2. On choisit 6 numéros au hasard entre 1 et 49 et on considère comme univers l'ensemble des combinaisons obtenues.
   (a) Toutes les combinaisons de 6 numéros choisis parmi 49 sont des événements distincts.
   (b) L'ensemble des combinaisons contenant les numéros 1 et 49 forme un événement.

Définition 4 : **Evénements particuliers**
Notons Ω l'univers d'une expérience aléatoire et $A,\ B \in \mathcal{P}(\Omega)$ deux événements.

1. Les éléments de Ω sont appelés des *événements élémentaires* (notés ω en général).
   Un événement élémentaire est donc une partie de Ω réduite à un seul élément (singleton).

2. L'événement $\Omega \backslash A$ est appelé l'*événement contraire* de A et est noté : $\bar{A}$.

3. L'événement $A \cap B$ est appelé l'*événement "A et B"*.

4. L'événement $A \cup B$ est appelé l'*événement "A ou B"*.

5. L'événement $\emptyset$ est appelé l'*événement impossible* et Ω est appelé l'*événement certain*.

6. Lorsque $A \cap B = \emptyset$, on dira que les événements A et B sont *disjoints* ou *incompatibles*.

7. Lorsque $(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_p)$ forme une partition de Ω, on dira qu'il s'agit d'un *système complet d'événements*.

Remarque 4. On rappelle que $(A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_p)$ forme une partition de Ω lorsque : $\left\{ \begin{array}{l} \text{les } A_k \text{ sont disjoints deux à deux} \\ A_1 \cup \cdots \cup A_n = \Omega \end{array} \right.$.

1.1.3 Une loi de probabilité

Commençons par remarquer qu'il est théoriquement impossible de définir sans se tromper la probabilité des résultats d'une expérience aléatoire donnée. Cette notion correspond en fait aux limites des fréquences d'apparition de chacun des résultats lorsqu'on répète une infinité de fois l'expérience aléatoire. Comme ceci est impossible à faire, nous sommes donc dans l'obligation de choisir personnellement une probabilité, ce choix se faisant selon l'idée que l'on se fait de l'expérience aléatoire (équiprobabilité ou pas...) On parle alors de *modélisation*.

Plusieurs probabilités étant donc possibles, nous devons commencer par définir ce que l'on appelle "probabilité".

Remarque 5. En partant de la définition précédente d'une probabilité, on constate que la probabilité P :

1. est une fonction qui va de $\mathcal{P}(\Omega)$ dans $[0,\ 1]$
2. vérifie $P(\Omega) = 1$
3. verifie $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ lorsque A et B sont des événements incompatibles.

Ce sont les propriétés que nous allons utiliser pour définir cette notion !

DÉFINITION 5 : **Loi de probabilité**
Soit Ω un univers et $P : \mathcal{P}(\Omega) \to [0,\ 1]$.
On dira que P est une *probabilité* (ou une *loi de probabilité*) sur Ω lorsque P vérifie :

1. $P(\Omega) = 1$
2. Si A et B sont deux événements disjoints, alors : $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

`Exemple 3.` Dans le cas du lancer d'un dé, avec P une probabilité sur l'univers Ω.
Si A est l'événement "obtenir un nombre pair" et B est l'événement "obtenir 3", alors $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$.

DÉFINITION 6 : **Espace probabilisé**

le couple $(\Omega,\ P)$ où $\begin{cases} \Omega \text{ est un univers} \\ P \text{ est une probabilité sur } \Omega \end{cases}$ est appelé un *espace probabilisé*.

Remarque 6. Si l'on choisit deux probabilités différentes sur un univers Ω, on obtient deux espaces probabilisés distincts.

PROPOSITION 1 :
Une probabilité sur un univers fini Ω est parfaitement déterminée par les probabilités des événements élémentaires.

<u>En d'autres termes</u>, Si $\Omega = \{\omega_1,\ \omega_2,\ \ldots,\ \omega_n\}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$:

Si $(p_i)_{i \in [\![1,n]\!]}$ est une famille finie de réels positifs telle que $\sum_{i \in [\![1,n]\!]} p_i = 1$ alors :

Il existe une unique probabilité P sur Ω telle que $P(\omega_i) = p_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$.

On a alors pour tout événement $A = \{\omega_{i_1},\ \omega_{i_2},\ \ldots,\ \omega_{i_p}\}$ avec $p \in [\![1, n]\!]$: $P(A) = \sum_{k \in [\![1,p]\!]} p_{i_k}$

Preuve 1 : Analyse / synthèse.

Remarque 7. On constate une analogie avec la définition des applications linéaires à l'aide des images des éléments d'une base.

`Exemple 4.` $(*)$ On lance un dé à 6 faces truqué de telle sorte que la probabilité d'obtenir k est proportionnelle à k. Déterminer la probabilité d'obtenir un nombre pair.

DÉFINITION 7 : **Equiprobabilité**
On dit qu'il y a *équiprobabilité* lorsque l'on affecte la même probabilité à chaque événement élémentaire.
On a alors :

1. Pour tout événement élémentaire ω de Ω : $P(\omega) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$
2. Pour tout événement E : $P(E) = \dfrac{\text{Card}(E)}{\text{Card}(\Omega)}$.

`Exemple 5.` $(*)$ Dans une classe, 10% des élèves jouent d'un instrument à corde, 20% des élèves jouent d'un instrument à vent et 5% des élèves jouent d'un instrument à corde et d'un instrument à vent. On choisit un élève au hasard en

supposant avoir équiprobabilité des résultats.
Quelle est la probabilité que cet élève joue d'un instrument à corde ou à vent ?

Remarque 8. **Equiprobabilité et Probabilité uniforme**
La probabilité P sur Ω définie par : $\forall \omega \in \Omega,\ P(\omega) = \dfrac{1}{\text{Card}(\Omega)}$ est appelée *Probabilité Uniforme*.

Remarque 9.

1. Lorsque dans une expérience aléatoire, on pense que tous les événements élémentaires ont la même probabilité, on dit qu'on a *équiprobabilité* et on munit alors l'univers de la probabilité uniforme.

2. On est implicitement dans un cas d'équiprobabilité lors :
   (a) du lancer d'un dé équilibré
   (b) du tirage de boules indiscernables au toucher
   (c) d'un tirage au hasard de jetons (indiscernables) dans une urne

3. Dans le cas de la probabilité uniforme, le calcul de probabilité se ramène essentiellement à un calcul de dénombrement.

1.2 Quelques propriétés simples des probabilités

Dans toute cette partie, on se place dans $(\Omega,\ P)$ un espace probabilisé et A, B, A_1, ..., A_n sont des événements de Ω.

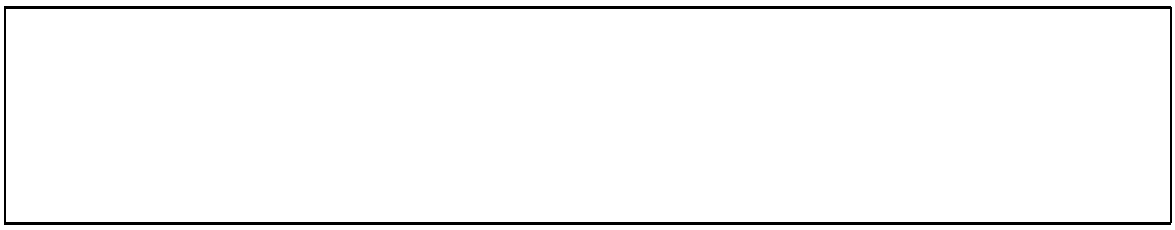
PROPOSITION 2 :
1. $P(\Omega) = 1$ et $P(\emptyset) = 0$.
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B)$ lorsque les événements sont incompatibles.
3. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.
4. $P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$
5. Si $A \subset B$ alors $P(A) \leq P(B)$ ("croissance" de la probabilité)

Preuve 2 : Pas de difficulté compte-tenu de la définition d'une probabilité.

PROPOSITION 3 : La probabilité de la réunion de deux événements est donnée par :

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Preuve 3 : Il suffit d'écrire que : $A \cup B = (A \backslash B) \cup B$.
Comme les événements $A \backslash B$ et B sont incompatibles, on a : $P((A \backslash B) \cup B) = P(A \backslash B) + P(B)$.
D'après la propriété précédente : $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.
D'où le résultat.



$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Exercice : 1
($*$) Démontrer que si C, D et E sont trois événements alors :

$$P(C \cup D \cup E) = P(C) + P(D) + P(E) - P(C \cap D) - P(D \cap E) - P(E \cap C) + P(C \cap D \cap E)$$

En généralisant cette formule à une union de n événements, on obtient la fomule du "crible" : (cf exercice TD)

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{p=1}^{n} (-1)^{p+1} \sum_{1 \leq i_1 \cdots \leq i_n \leq 1} P(\bigcap_{1 \leq k \leq p} A_{i_k})$$

COROLLAIRE 4 : **Ensemble d'événements disjoints deux à deux**

Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un ensemble d'événements disjoints deux à deux, alors :

$$P(A_1 \cup \cdots \cup A_n) = P(A_1) + \cdots + P(A_n)$$

Si $(A_1, \ldots, A_n)$ est un système complet d'événements alors :

1. $P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$
2. $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$

Preuve 4 : La première formule est immédiate par récurrence. Les autres s'en déduisent...

COROLLAIRE 5 :
La probabilité d'une réunion d'événements est inférieure à la somme des probabilités de ces événements :

$$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) \leq \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

Et en particulier : $P(A \cup B) \leq P(A) + P(B)$

Preuve 5 : Par récurrence.

Exercice : 2
(∗) On distribue 5 cartes d'un jeu de 32 cartes à un joueur de façon équiprobable.

1. Quelle est la probabilité que ce joueur ait en main exactement 3 carreaux ?
   Dans cette questions, vous envisagerez deux modélisations possibles de Ω
2. Quelle est la probabilité que ce joueur ait en main au moins deux cartes indentiques ?

Remarque 10. Quand un événement s'exprime sous la forme "obtenir au moins ...." ou "obtenir au plus ....", il est parfois judicieux de s'intéresser à l'événement contraire. Sinon, on décompose l'événement en une réunion d'événements disjoints deux à deux.

Exercice : 3
(∗) On lance 6 fois un dé non truqué.
Quelle est la probabilité d'obtenir les 6 numéros de 1 à 6 ?

Exercice : 4
(∗∗) Au bridge, les 4 joueurs reçoivent 13 cartes. On suppose les distributions équiprobables.
Quelle est la probabilité pour que chaque joueur reçoive un as ?
Vous envisagerez deux modélisations possibles de Ω *selon que les mains sont considérées triées ou non*

Cas d'un tirage de p objets parmi n

Il existe plusieurs façons de tirer ces objets, donnant chacun des univers Ω différents :

1. Tirage simultané : on obtient des p-combinaisons
2. Tirage avec remise : on obtient des p-listes (ou p-uplets)
3. Tirage sans remise : on obtient des arrangements

Remarque 11. Les exercices précédents montrent que pour un événement ne faisant pas appel à l'ordre, les modèles "tirage simultané" et "tirage successif sans remise" donnent les mêmes probabilités.

Exercice : 5

(∗∗) Une urne contient 5 boules blanches, 4 boules noires et 3 bleues, toutes indiscernables au toucher.
On tire 3 boules dans l'urne.
Répondre aux deux questions suivantes dans les 3 cas précédents :

1. Quelle est la probabilité d'obtenir 3 boules de la même couleur ?
2. Quelle est la probabilité d'obtenir une boule de chaque couleur ?

Exercice : 6

(∗∗) Une urne contient N boules de k couleurs différentes mais indiscernables au toucher : $\begin{cases} N_1 \text{ de la couleur } c_1 \\ \dots \\ N_k \text{ de la couleur } c_k \end{cases}$.
On a donc $N_1 + N_2 + \cdots + N_k = N$. On tire n boules de l'urne.
Dans le cas des 3 types de tirages possibles, déterminer la probabilité d'obtenir n_1 boules de la couleur c_1, ...etc... et n_k boules de la couleur c_k.
Aide : pour raisonner, on pourra considérer que toutes les boules sont numérotées de 1 *à* N

2 Probabilités conditionnelles

2.1 Introduction

`Exemple 6.` Un joueur tire, au hasard et de façon équiprobable, une carte d'un jeu de 32 cartes.
On considère les événements suivants :

- $F =$ "la carte tirée est une figure"
- $R =$ "la carte tirée est un roi"

1. Calculer $P(F)$, $P(R)$ et $P(R \cap F)$ (où P désigne la probabilité uniforme)

2. Le joueur affirme : "la carte tirée est une figure".
   Quelle est alors la probabilité que ce soit un roi ?
   Cette probabilité est appelée la "probabilité de l'événement R sachant l'événement F et est notée $P_F(R)$.
   Vérifier la formule :
   $$P_F(R) = \frac{P(R \cap F)}{P(F)}$$
3. Quelle est la probabilité que la carte soit une figure sachant que c'est un roi ? Vérifier la formule :
   $$P_R(F) = \frac{P(R \cap F)}{P(R)}$$

2.2 Probabilité conditionnelle

THÉORÈME 6 : **Formule**
Soit une expérience aléatoire d'univers Ω, P une probabilité sur Ω et B un événement tel que $P(B) \neq 0$.
L'application P_B de $\mathcal{P}(\Omega)$ définie par :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{pour tout } A \in \mathcal{P}(\Omega) \qquad \text{est une probabilité sur } \Omega$$

Preuve 6 :

1. On montre facilement que P_B est bioen à valeurs dans $[0,\ 1]$.
2. De plus, on a bien $P_B(\Omega) = \frac{P(\Omega \cap B)}{P(B)} = \frac{P(B)}{P(B)} = 1$.
3. Soient A_1 et A_2 deux événements disjoints.

   On a : $P_B(A_1 \cup A_2) = \dfrac{P((A_1 \cup A_2) \cap B)}{P(B)} = \dfrac{P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)}{P(B)}$.

   Or, les événements $A_1 \cap B$ et $A_2 \cap B$ sont disjoints puisque A_1 et A_2 le sont, donc :

   $$P((A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B) = P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)$$

   D'où : $P_B(A_1 \cup A_2) = \dfrac{P(A_1 \cap B) + P(A_2 \cap B)}{P(B)} = P_B(A_1) + P_B(A_2)$.

Remarque 12. Outre le fait que le modèle d'équiprobabilité permet de justifier partiellement cette formule, on peut la comprendre en considérant que B étant réalisé, il devient le nouvel univers de référence et que dans ce contexte, l'événement A se limite à $A \cap B$. La division par $P(B)$ permet d'obtenir $P_B(B) = 1$.

DÉFINITION 8 : **Probabilité conditionnelle**
L'application P_B ainsi définie s'appelle la *probabilité B-conditionnelle*.
La quantité $P_B(A)$ se lit "probabilité de A sachant B".
On a ainsi :

$$P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Puisque P_B est une probabilité, cette fonction vérifie toutes les propriétés usuelles des probabilités.
En particulier, nous avons $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A)$.
L'événement contraire de "A sachant B" est donc "$\bar{A}$ sachant B".

Remarque 13. $P_B(A)$ est aussi parfois notée $P(A|B)$, mais cette notation est ambigüe dans la mesure où elle semble indiquer à tors que "$A|B$" est un événement.

`Exemple 7.` $(*)$

1. Un élève sérieux de terminale a 80% de chance d'avoir son Bac au mois de juin. Pendant les grandes vacances qui suivent, il passe un concours pour intégrer une école. Le concours est ouvert à tous les élèves (bacheliers ou non) mais notre candidat a 60% de chance d'être admis dans cette école s'il est bachelier et 30% sinon.
   Notons B l'événement "l'élève réussi son Bac" et A l'événement "l'élève est admis dans l'école".
   Quelle est la probabilité que l'élève réussisse son bac et soit admis à son école ?
   Quelle est la probabilité que l'élève n'ait ni son bac ni son concours ?

2. On considère une famille de deux enfants. On suppose que chaque enfant a une chance sur deux d'être une fille.
   Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que l'ainée est une fille.
   Quelle est la probabilité que les deux enfants soient des filles sachant que qu'il y a au moins une fille ?

3. Le tiers d'une population a été vacciné contre une maladie. Au cours d'une épidémie, on constate que, sur quinze malades, il y a deux personnes vaccinées. Le vaccin est-il efficace ?
   On suppose de plus, que sur cent personnes vaccinées, huit sont malades.
   Quelle est la proportion de malades dans la population ?

THÉORÈME FONDAMENTAL 7 : **Formule des probabilités composées**
Pour tout événement A et B d'un espace probabilisé $(\Omega,\ P)$ on a :

$$P(A \cap B) = P(B)P_B(A) \quad \text{ou} \quad P(A \cap B) = P(A)P_A(B)$$

Plus généralement, si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements de $(\Omega,\ P)$ on a :

$$\boxed{P(A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_n) = P(A_1)P_{A_1}(A_2)P_{A_1 \cap A_2}(A_3) \ldots P_{A_1 \cap A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}}(A_n)}$$

Preuve 7 :

1. Immédiat.
2. Par une simple récurrence.

La formule des probabilités composées sur un arbre

`Exemple 8.` (∗) Une urne contient initialement 4 boules blanches et 2 boules noires indiscernables au toucher. On tire une boule et on la remet dans l'urne avec une boule de la même couleur. On procède alors à un deuxième tirage. Quelle est la probabilité d'obtenir deux boules noires ?

Remarque 14. La formule générale est utilisée en particulier dans le cas d'événements chronologiques.

Exercice : 7

(∗∗) Une urne contient n boules indiscernables au toucher : b blanches et r rouges ($r \geq 4$).
On tire 4 boules successivement et sans remise de cette urne.

1. Représenter sous la forme d'une branche d'arbre les étapes à parcourir pour obtenir 4 boules rouges. Quelle est la probabilité de cet événement ?
2. Soit $k \in [\![1, b+1]\!]$.
   Quelle est la probabilité qu'une boule rouge apparaisse pour la première fois au k-ème tirage ?

Exercice : 8

(∗) Une puce se déplace sur les 3 sommets d'un triangle ABC du plan.
Au départ, elle est en A et à chaque instant $n \in \mathbb{N}^*$, elle fait un saut :
— Si elle est en A, elle va en B
— Si elle est en B, elle a une chance sur deux d'aller en A ou en C
— Si elle est en C elle y reste.

1. Montrer que la puce ne peut arriver en C qu'à des instants pairs.
2. Représenter sous la forme d'une branche les étapes à parcourir pour que la puce arrive en C à l'instant $2n$. En déduire la probabilité de cet événement.

2.3 Formule des probabilités totales

Théorème Fondamental 8 : **Formule des probabilités totales**
Soit Ω un univers muni d'une probabilité P.
Si les événements B_1, B_2, …, B_n, de probabilités non nulles, forment un système complet d'événements de Ω, alors pour tout événement A, on a :

$$\boxed{P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i \cap A) = \sum_{i=1}^{n} P_{B_i}(A)P(B_i)}$$

En particulier, si A et B sont deux événements : $P(A) = P_B(A)P(B) + P_{\bar{B}}(A).P(\bar{B})$

Preuve 8 :

Les ensembles $A \cap B_1$, $A \cap B_2$, …, $A \cap B_n$ constituent une partition de A donc : $A = \bigcup_{i=1}^{n} A \cap B_i$

D'après l'additivité de la probabilité pour les ensembles disjoints on a : $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(A \cap B_i)$.

Et comme $P(A \cap B_i) = P_{B_i}(A)P(B_i)$ pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq n$, on a : $P(A) = \sum_{i=1}^{n} P_{B_i}(A)P(B_i)$

La formule des probabilités totales sur arbre

Remarque 15. La formule reste vraie si B_1, B_2, ..., B_n sont des événements 2 à 2 incompatibles tels que $A \subset \bigcup_{i=1}^{n} Bi$.

`Exemple 9.` $(*)$

1. **Bac et concours.**
   Reprendre l'exemple de notre élève qui passe son bac et son concours. On rencontre cet élève au mois de septembre et il nous dit qu'il a été admis à l'école. Quelle est la probabilité qu'il ait eu son bac ?
2. **Le feu tricolore.**
   Un automobiliste arrive à proximité - disons une dizaine de mètres - d'un feu tricolore et aucun véhicule ne le précède. On suppose que, si le feu est vert à ce moment là, l'automobiliste décide de passer avec une probabilité de 99/100. Si le feu est orange, l'automobiliste décide de passer avec une probabilité de 3/10 et enfin si le feu est rouge, l'automobiliste décide de passer avec une probabilité de 1/100 (quelques fous...). Le cycle du feu tricolore dure une minute : vert : 25s, orange : 5s et rouge : 30s.
   Quelle est la probabilité que l'automobiliste passe sans s'arrêter à ce feu tricolore ?

Exercice : 9

$(*)$ Une compagnie d'assurance estime que ses clients se divisent en deux catégories : les clients enclins aux accidents (20% de la population) et les autres. Pour la première catégorie, la probabilité d'avoir au moins un accident par an est de $0,5$ alors que pour la deuxième catégorie, la probabilité est $0,1$.
Quelle est la probabilité qu'un nouvel assuré soit victime d'un accident durant l'année qui suit la signature de son contrat ?

Cas d'une suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements

La formule des probabilités totales donne une relation de récurrence entre $P(A_n)$ et $P(A_{n-1})$ lorsqu'on l'applique de la façon suivante :

$$P(A_n) = P_{A_{n-1}}(A_n).P(A_{n-1}) + P_{\bar{A}_{n-1}}(A_n).(1 - P(A_{n-1}))$$

Bien entendu, cette formule n'a ici d'intérêt que si l'on connaît les probabilités $P_{A_{n-1}}(A_n)$ et $P_{\bar{A}_{n-1}}(A_n)$

Exercice : 10

$(**)$ Soit $(a,\ b) \in]0,\ 1[$. Le fonctionnement d'un appareil au cours du temps obéit aux deux règles suivantes :

R_1 : s'il fonctionne à la date $n-1$, il a la probabilité a de fonctionner à la date n

R_2 : s'il est en panne à la date $n-1$, il a la probabilité b d'être en panne à la date n

On suppose que l'appareil était en marche à la date 0. Pour $n \in \mathbb{N}$, on note :
- M_n l'événement : "l'appareil est en marche à la date n"
- p_n la probabilité de M_n

Déterminer p_n et sa limite en $+\infty$.

La formule des probabilités totales pourra en particulier s'appliquer lorsque l'expérience se déroule en plusieurs étapes et que la première aboutit à des événements incompatibles entre eux et donnant un système complet d'événements.

Exercice : 11

$(*)$ Soit $n \in \mathbb{N}$.
Une urne $\mathcal{U}$ contient des jetons numérotés : 1 jeton numéroté 1, 2 jetons numérotés 2, ...n jetons numérotés n. On dispose également de n urnes numérotées de 1 à n et contenant n boules : la $i$ème urne contient i boules blanches et $n-i$ boules noires. On tire un jeton dans $\mathcal{U}$: si le jeton contient le numéro i, on tire une boule dans l'urne i.
Quelle est la probabilité que la boule prélevée soit blanche ?

2.4 Formule de Bayes

Théorème Fondamental 9 : **Formule de probabilité des causes**
Pour tout événement A et B de probabilité non nulle de l'espace probabilisé $(\Omega,\ P)$, on a :

$$\boxed{P_B(A) = \frac{P(A)P_A(B)}{P(B)}}$$

Si un événement B se produit après un événement A, cette formule nous permet à partir de $P_A(B)$ de déduire $P_B(A)$ qui concerne un événement qui lui, remonte cette chronologie.

Preuve 9 : Immédiat !

`Exemple 10.` $(*)$ On reprend les expériences des derniers exercices.

1. Quelle est la probabilité que la boule ait été tirée dans l'urne i sachant qu'elle est blanche ?
2. Qu'elle est la probabilité que l'appareil fonctionnait au temps $n-1$ sachant qu'il fonctionnait au temps n ?

Théorème Fondamental 10 : **Formule de Bayes**
Soit $A_1,\ \ldots,\ A_n$ un système complet d'événements de probabilité non nulle de l'espace probabilisé $(\Omega,\ P)$.
Pour tout événement B tel que $P(B) \neq 0$, on a :

$$\boxed{P_B(A_i) = \frac{P_{A_i}(B)P(A_i)}{\displaystyle\sum_{k=1}^{n} P_{A_k}(B)P(A_k)}}$$

En particulier lorsque A est un événement de probabilité non nulle : $P_B(A) = \dfrac{P_A(B)P(A)}{P_A(B)P(A) + P_{\bar{A}}(B)P(\bar{A})}$

Preuve 10 : Immédiat !

`Exemple 11.` $(*)$ Une certaine maladie affecte une personne sur 10000.
On dispose d'un test sanguin qui détecte cette maladie avec une fiabilité de 99% lorsque cette maladie est effectivement présente. Cependant, on obtient un résultat faussement positif pour $0,1\%$ des personnes saines testées.
Quelle est la probabilité qu'une personne soit réellement malade lorsqu'elle a un test positif ? Commenter ce résultat.

Exercice : 12
$(*)$ Lors d'une interrogation, un étudiant se trouve face à une question dont m réponses possibles sont proposées et une seule est correcte. Soit l'étudiant connaît la réponse à la question, soit il choisit au hasard une réponse parmi les m proposées. La probabilité que l'étudiant connaisse la réponse à la question est $p \in]0,\ 1[$.
Sachant que l'étudiant a répondu correctement à la question posée, quelle est la probabilité qu'il ait répondu en connaissant la bonne réponse ?

3 Evénements indépendants

3.1 Définition

Définition 9 : Soit P une probabilité sur un univers Ω.
On dit que deux événements A et B (de probabilités non nulles) sont P-indépendants lorsque la réalisation (ou non) de l'un n'a pas d'influence sur la probabilité de réalisation de l'autre :

$$P_B(A) = P(A) \quad \text{ou} \quad P_A(B) = P(B)$$

On convient qu'un événement A tel que $P(A) = 0$ est P-indépendant de tout autre.

Remarque 16. On vérifie facilement que $P_B(A) = P(A) \iff P_A(B) = P(B)$.

THÉORÈME 11 : **Caractérisation de l'indépendance**
Soient A et B des événements tels que $P(A) \neq 0$ et $P(B) \neq 0$. On a alors :

$$A \text{ et } B \text{ sont indépendants} \iff P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

Preuve 11 :

1. Si A et B sont indépendants, alors : $P(A \cap B) = P_B(A)P(B) = P(A)P(B)$
2. Réciproquement, si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$ alors on a $P_B(A)P(B) = P(A)P(B)$ d'où $P_B(A) = P(A)$.

⚠ Attention ⚠

```
Ne pas confondre l'indépendance et l'incompatibilité de deux événements.
- L'incompatibilité est une notion ensembliste car elle ne dépend que de
  la définition des ensembles
- L'indépendance est une notion probabiliste car elle dépend de la probabilité
  choisie
```

Remarque 17. Prouver cependant que 2 événements disjoints (ou incompatibles) ne peuvent être indépendants.

`Exemple 12.` Si on lance un dé et si on considère les événements :

- $A =$ "obtenir un nombre pair"
- $B =$ "obtenir un nombre impair"

Alors A et B sont incompatibles et pourtant ils sont dépendants puisque $\begin{cases} P(A) = 0,5 \\ P(B) = 0,5 \end{cases}$ alors que $P(A \cap B) = 0$

Exercice : 13
(∗) Sur $\Omega = [\![1, 6]\!]$ on considère la probabilité uniforme P_1 et la propriété P_2 définie par :

$$P_2(\{1\}) = P_2(\{2\}) = \frac{1}{6}, \quad P_2(\{3\}) = \frac{1}{3} \quad \text{et } P_2(\{4\}) = P_2(\{5\}) = P_2(\{6\}) = \frac{1}{9}$$

Pour chacune des 2 probabilités suivantes, étudier l'indépendance des 2 événements suivants : $A = \{1,\ 2\}$ et $B = \{2,\ 3\}$.

Exercice : 14
(∗) Dire si les événements suivants sont indépendants :

1. On lance deux dés et on désigne par A l'événement "le premier dé amène un nombre pair", par B l'événement "le deuxième dé amène un nombre impair" et par C l'événement "les deux dés amènent un nombre pair".
2. On lance une pièce deux fois de suite et on considère les événements $\begin{cases} A_1 = \text{"FACE au premier lancer"} \\ A_2 = \text{"FACE au second lancer"} \end{cases}$.
3. Deux événements A et B incompatibles et de probabilités non nulles.
4. L'événement Ω et un événement A de probabilité non nulle.

⚠ Attention ⚠

```
Il faut être méfiant avec la notion d'indépendance.
Deux événements peuvent intuitivement sembler indépendants alors que les
calculs montrent clairement qu'ils ne le sont pas. On évitera donc d'affirmer
l'indépendance de deux événements sans avoir effectué les calculs qui le prouvent.
```

Exercice : 15
(∗) Quatre lots sont répartis entre 5 personnes P_1, ..., P_5 de telle sorte que chaque lot est attribué par tirage au sort d'une personne parmi les 5. Pour tout $k \in [\![1, 5]\!]$, on note E_k : "la personne P_k ne reçoit aucun lot".
Les événements E_k, $1 \leq k \leq 5$, sont-ils deux à deux indépendants ?

Réponse attendue : "NON !"

Proposition 12 : Soit A et B deux événements indépendants de l'espace probabilisé $(\Omega,\ P)$.
Les couples d'événements $\left\{\begin{array}{l}\bar{A}\\B\end{array}\right.$, $\left\{\begin{array}{l}A\\\bar{B}\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l}\bar{A}\\\bar{B}\end{array}\right.$ sont eux aussi indépendants.

Preuve 12 : $P_B(\bar{A}) = 1 - P_B(A) = 1 - P(A) = P(\bar{A})$.
Donc $\bar{A}$ et B sont indépendants et par symétrie, $\bar{B}$ et A sont indépendants.
En appliquant le résultat démontré à $\bar{A}$ et B, on en déduit que $\bar{A}$ et $\bar{B}$ sont aussi indépendants.

⚠ Attention ⚠

`Même si (A,B) et (A,C) sont des couples d'événements indépendants, on ne peut rien dire de l'indépendance des événements des couples (A,B et C) et (A,B ou C).`

`Exemple 13.` (∗) On lance deux dés équilibrés et on considère les événements : A "le premier dé donne un nombre pair", B "le deuxième dé donne un nombre pair" et C "les deux dés donnent des nombres de même parité".

Montrer que $\left\{\begin{array}{l}A\\B\end{array}\right.$ et $\left\{\begin{array}{l}A\\C\end{array}\right.$ sont indépendants, mais ni $\left\{\begin{array}{l}A\\B\cap C\end{array}\right.$ ni $\left\{\begin{array}{l}A\\B\cup C\end{array}\right.$.

Exercice : 16
(∗) Questions générales :

1. Montrer que si $(A,\ B)$ et $(A,\ C)$ sont des couples d'événements indépendants telles que $B \subset C$, alors A et $C\backslash B$ sont indépendants.

2. Montrer que si pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, A et B_i sont indépendants avec les événements B_i incompatibles deux à deux, alors A et $\bigcup_{i=1}^{n} B_i$ sont indépendants.

Définition 10 : Extension à n événements
$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ sont dits *mutuellement indépendants* (ou tout simplement *indépendants*) lorsque pour toute famille d'indices $K \subset [\![1, n]\!]$, on a :

$$P(\bigcap_{i\in K} A_i) = \prod_{i\in K} P(A_i)$$

Il ne faut pas confondre cette notion avec l'indépendance deux à deux des événements :
$A_1,\ A_2,\ \ldots,\ A_n$ sont dits *deux à deux indépendants* lorsque pour tous i et j vérifiant $1 \leq i < j \leq n$:

$$P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j)$$

Remarque 18.

1. Des événements mutuellement indépendants le sont aussi deux à deux (il suffit de prendre les parties K de deux éléments), mais la réciproque est fausse.

2. La notion d'*indépendance mutuelle* est une notion très forte qui demande $2^n - n - 1$ égalités pour être vérifiée contre $\frac{n(n-1)}{2}$ pour l'"indépendance deux à deux. En général, elle sera soit donnée en hypothèse dans les expériences aléatoires étudiées, soit la conséquence de l'indépendance connue d'autres événements.

`Exemple 14.` (∗) Considérons, pour le lancer de deux pièces de monnaie (bien équilibrées), les événements :
— A : "on obtient PILE au premier lancer",
— B : "on obtient PILE au second lancer"
— C : "on obtient le même côté aux deux lancers".
Montrer que ces trois événements sont bien deux à deux indépendants mais pas mutuellement indépendants.

Exercice : 17
(∗) On lance deux dés cubiques discernables (un rouge et un bleu par exemple) et on note les numéros obtenus. Soit A l'événement "le premier dé donne un entier pair", B l'événement "le second dé donne un entier impair" et C l'événement "les deux dés donnent des entiers de même parité".
Les événements A, B et C sont-ils deux à deux indépendants ? Mutuellement indépendants ?

PROPOSITION 13 : Si les événements A_1, A_2, ..., A_n sont mutuellement indépendants alors les événements B_1, B_2, ..., B_n où chaque B_i est soit A_i, soit $\bar{A}_i$ sont aussi mutuellement indépendants.

Preuve 13 : On s'en dispensera...

PROPOSITION 14 : Soit A_1, A_2, ..., A_n des événements mutuellement indépendants.
Pour tout $p \in [\![1, n-1]\!]$, si

1. B_1 est la réunion ou l'intersection d'événements de $\{A_1,\ \ldots,\ A_p\}$ ou de leur contraire
2. B_2 est la réunion ou l'intersection d'événements de $\{A_{p+1},\ \ldots,\ A_n\}$ ou de leur contraire

Alors B_1 et B_2 sont indépendants.

Preuve 14 : On s'en dispensera...

4 Modélisation d'une succession d'expériences aléatoires indépendantes

L'indépendance de deux événements est une conséquence de la modélisation choisie pour l'espace probabilisé et donc de la probabilité choisie.
Ainsi, lorsque deux expériences n'ont semble-t-il aucun lien de cause à effet, on choisira une probabilité telle que les événements associés aux résultats de ces expériences soient indépendants.

4.1 Succession de deux expériences indépendantes

Considérons deux expériences aléatoires $\mathcal{E}_1$ et $\mathcal{E}_2$ totalement indépendantes l'une de l'autre dans le sens où la probabilité d'un événement lié à l'une des expériences ne semble pas dépendre du fait qu'un événement lié à l'autre se soit produit ou non.
La modélisation mathématique de ces deux expériences aboutit à deux espace probabilisés $(\Omega_1,\ P_1)$ et $(\Omega_2,\ P_2)$.
On considère maintenant l'expérience $\mathcal{E}$ qui consiste à effectuer successivement $\mathcal{E}_1$ puis $\mathcal{E}_2$.

Comment modéliser $\mathcal{E}$ de telle sorte que les événements de $\mathcal{E}_1$ et de $\mathcal{E}_2$ soient effectivement indépendants ?

1. L'univers associé à $\mathcal{E}$ est bien entendu $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$.

2. Quelle probabilité P choisir ?

   (a) Du point de vu de l'observateur, un événement $A_1 \subset \Omega_1$ correspond au même événement que l'événement $A_1 \times \Omega_2$. On souhaite donc que $P(A_1 \times \Omega_2) = P_1(A_1)$ et donc de même, que $P(\Omega_1 \times A_2) = P_2(A_2)$.

   (b) Les événements A_1 et A_2 devant être indépendants, on souhaite donc que :

   $$P(A_1 \times A_2) = P((A_1 \times \Omega_2) \cap (\Omega_1 \times A_2)) = P(A_1 \times \Omega_2) \times P(\Omega_1 \times A_2) = P_1(A_1).P_2(A_2)$$

   Cette relation définit donc parfaitement la probabilité P.

   (c) On vérifie facilement que P ainsi construite est bien une probabilité sur Ω.

4.2 Généralisation

Plus généralement, lorsqu'on souhaitera modéliser une succession d'expériences aléatoires mutuellement indépendantes et représentées par les espaces probabilisés $(\Omega_i,\ P_i)$, on pourra la modéliser par :

$$(\Omega,\ P) \quad \text{où} \quad \Omega = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_n \quad \text{et} \quad P(A_1 \times \cdots \times A_n) = P_1(A_1).P_2(A_2) \ldots P_n(A_n)$$

Ainsi lorsqu'on souhaitera modéliser la répétition indépendante d'une même expérience aléatoire (épreuve répétée) représentée par l'espace probabilisé $(\Omega,\ P)$, on pourra considérer l'espace probabilisé :

$$(\Omega,\ Q) \quad \text{où} \quad \Omega = \Omega^n \quad \text{et} \quad Q(A_1 \times \cdots \times A_n) = P(A_1).P(A_2) \ldots P(A_n)$$

`Exemple 15.` C'est ainsi que l'on modélise le jeu de "pile ou face".

DÉFINITION 11 : **Epreuve et Schéma de Bernoulli**
On appellera *Epreuve de Bernoulli* une expérience aléatoire à 2 issues "0" (échec) ou "1" (succès).
Un *schéma de Bernoulli* est alors la répétition de n épreuves de Bernoulli.
Un tel schéma peut donc être modélisé par $(\{0,\ 1\}^n,\ Q)$ avec Q la probabilité précédente.

`Exemple 16.` Le lancer répété d'une pièce est un schéma de Bernoulli lorsqu'on s'intéresse à la face obtenue.

`Exemple 17.` $(*)$ On lance n fois une pièce truquée (on note p la probabilité d'obtenir "Pile").
Quelle est la probabilité p_k pour qu'on obtiennent k fois "Pile" ? Vérifier que $\sum_{k=0}^{n} p_k = 1$.

Feuille d'exercices MPSI : Les Probabilités

Codage :

1. Les exercices avec des coeurs ♡ sont à traiter en priorité.
2. Le nombre d'étoiles $*$ ou de coeurs ♡ correspond à la difficulté des exercices.

I] Théorie

Lorsque P est une probabilité, alors on a :

1. $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
2. $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
3. $P(B \backslash A) = P(B) - P(A \cap B)$
4. Si $(A_1,\ \ldots,\ A_n)$ est un système complet d'événements alors :
   (a) $P(A_1) + P(A_2) + \cdots + P(A_n) = 1$
   (b) $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$

Exercice de TD : 18
(♡♡) Soit A et B deux événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\ P)$.
On pose $\alpha = P(A \cap B)$, $\beta = P(A \cap \bar{B})$, $\gamma = P(\bar{A} \cap B)$ et $\delta = P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

1. Montrer que : $P(A \cap B) - P(A)P(B) = \alpha\delta - \beta\gamma$.
2. Etudier sur $[0,\ 1]$ la fonction f définie par $f(x) = x(1-x)$.
   En déduire que : $P(A \cap B) - P(A)P(B) \leq \dfrac{1}{4}$.
   On pourra remarquer que $\alpha\delta - \beta\gamma \leq \alpha\delta$.

Exercice de TD : 19
$(**)$ **La formule du crible**

1. Soit $A_1, \ldots, A_n$ des événements d'un espace probabilisé $(\Omega,\ P)$.
   On souhaite ici démontrer la formule :
   $$P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{k=1}^{n} \left[(-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < i_2 \cdots < i_k \leq n} P(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k})\right] \qquad \text{formule du crible}$$
   Notons ω_0 un événement élémentaire contenu dans $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$.
   En appliquant la formule $P(A) = \sum_{\omega \in A} P(\omega)$, nous pouvons affirmer que l'expression $P(\omega_0)$ apparaît une fois dans le développement du membre de droite de la formule à démontrer.

(a) On considère ici ω_0 un événement qui appartient exactement à p des événements $A_1, \dots, A_n$.
Montrer que le coefficient de $P(\omega_0)$ une fois le membre de droite de la formule du crible développé est :

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\binom{p}{k}$$

Calculer cette somme.

(b) Conclure.

2. Application au problème des rencontres :
Une urne contient n boules numérotées de 1 à n.
On les extrait successivement sans remise et après chaque tirage, on observe le numéro de la boule tirée. On dit qu'il y a "rencontre au ième tirage" si la boule tirée porte le numéro i. On note E l'événement : "il n'y a aucune rencontre".

(a) Définir un espace probabilisé permettant de décrire l'expérience aléatoire.

(b) Pour tout $i \in \mathbb{N}$, on note A_i l'événement "il y a rencontre au ième tirage"
Exprimer $\bar{E}$ en fonction des A_i.
En déduire en appliquant la formule du crible que $P(E) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

II] Calculs de probabilités

Le calcul de probabilité commence en général par une modélisation de l'expérience aléatoire :

- Définition d'un univers adapté Ω.

1. Définition de la probabilité sur Ω.
En général, lorsque c'est légitime, on choisit Ω de telle sorte que ses éléments soient tous équiprobables.

Lorsqu'on suppose l'équiprobabilité des événements élémentaires, la probabilité d'un événement est donnée par la formule :

$$P(A) = \frac{\operatorname{Card} A}{\operatorname{Card} \Omega}$$

Nous sommes alors ramenés à un problème de dénombrement.

Exercice de TD : 20

(♡) Qu'est ce qui est le plus probable :

1. sortir au moins un six en lançant 4 fois un dé ou bien
2. obtenir un double 6 en lançant 24 fois deux dés ?

Exercice de TD : 21

(♡) On tire au hasard et sans remise deux dominos d'un jeu de dominos.
Quelle est la probabilité qu'ils soient juxtaposables ?

Exercice de TD : 22

(♡) Un tiroir contient 12 paires de chaussettes toutes différentes. On prend 4 chaussettes.
Quelle est la probabilité d'obtenir :

1. deux paires complètes
2. au moins une paire
3. une paire et une seule

Exercice de TD : 23

(∗) Soit $n \geq 2$ et $r \geq n-2$. On considère n personnes dont A et B.

1. Elles s'alignent au hasard dans une file.
Quelle est la probabilité qu'il y ait exactement r personnes entre A et B ?

2. Même question si elles se placent sur un cercle et que l'on compte les personnes entre A et B et tournant dans le sens direct.

Exercice de TD : 24

(♡)

1. En négligeant les années bissextiles, quelle est la probabilité que n personnes aient leur anniversaire à des dates deux à deux distinctes ?
2. A l'aide de la formule de Stirling ($n! \sim \sqrt{2\pi n}\left(\frac{n}{e}\right)^n$), donner un équivalent de la valeur obtenue à la question précédente.
3. Utiliser cet équivalent pour donner une valeur indicatrice de la probabilité que dans votre classe, au moins 2 élèves ont leur anniversaire le même jour.

Exercice de TD : 25

(♡) On lance n fois une pièce de monnaie, la probabilité d'obtenir "pile" à chaque lancer étant $p \in]0,\ 1[$.

1. Quelle est la probabilité d'obtenir le premier "pile" au n-ième lancer ?
2. Pour $k \in [\![1, n]\!]$, quelle est la probabilité d'obtenir le k-ième "pile" entre le premier et le n-ième lancer ?

Exercice de TD : 26

(♡♡) On considère une urne contenant n jetons numérotés de 1 à n ($n \geq 2$). On prélève ces jetons au hasard, un par un et sans remise. On note $(u_1,\ \ldots,\ u_i)$ la liste des numéros tirés.
Pour $i \in [\![2, n]\!]$, on dit qu'il y a "record à l'instant i" lorsque $u_i > \max(u_1,\ \ldots,\ u_{i-1})$.
On convient qu'il y a systématiquement record à l'instant 1.

1. Calculer, pour $i \in [\![1, n]\!]$, la probabilité r_i qu'il y ait record à l'instant i.
2. Calculer les probabilités que, durant la totalité des tirages, on assite exactement à :

   (a) un seul record (b) n records (c) 2 records

Exercice de TD : 27

(∗∗) **Marche aléatoire dans $\mathbb{Z}^2$.**
Une puce part de $O(0,\ 0)$ et à chaque saut se déplace de façon équiprobable, d'une unité vers le haut, vers le bas, vers la droite ou vers la gauche. Quelle est la probabilité que la puce se retrouve au point O après n sauts ?
Donner un équivalent de cette probabilité en $+\infty$ lorsque n est pair.

III] Probabilités conditionnelles - Formule des Probabilités Totales

Si $(A_1,\ \ldots,\ A_n)$ est un système complet d'événements alors :

1. $P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \cdots + P(B \cap A_n)$
2. $P(B) = P_{A_1}(B)P(A_1) + P_{A_2}(B)P(A_2) + \cdots + P_{A_n}(B)P(A_n)$

Exercice de TD : 28

(♡♡) Lors d'un jeu télévisé, un joueur doit choisir une porte au hasard parmi 3 de façon équiprobable, sachant qu'une voiture se situe derrière l'une d'entre elles. L'animateur décide alors d'ouvrir l'une des deux portes restantes qui ne cache pas la voiture.
Le joueur a-t-il intérêt à changer son choix ou à le maintenir ?

Exercice de TD : 29

(♡♡) Dans une famille de deux enfants, quelle est la probabilité que les deux soient des garçons sachant que l'un des deux est un garçon né le 29 février ?
On pourra introduire les événements : D_i : "le ième enfant est né le 29 février" pour $i \in [\![1, 2]\!]$.

Exercice de TD : 30

(♡) Un fumeur impénitent décide d'essayer de ne plus fumer. On admet que s'il ne fume pas un jour donné, alors la probabilité pour qu'il ne fume pas le lendemain vaut 0.3. Par contre, s'il succombe à son vice un jour donné, la probabilité pour qu'il ne fume pas le lendemain vaut 0.9.
Notons, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ F_n l'événement "la personne fume le jour n" et $p_n = P(\bar{F}_n)$.

1. Trouver une relation entre p_{n+1} et p_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Calculer p_n en fonction de n et p_1 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

3. Montrer que la suite (p_n) converge et donner sa limite.

Exercice de TD : 31

(♡) n personnes $A_1, \dots A_n$ se passe de l'une à l'autre une information binaire ("oui" ou "non").
La probabilité que la personne A_n transmette à A_{n+1} l'information qu'il a reçu est $p \in]0,\ 1[$.

1. On note p_n la probabilité de l'événement : "A_n reçoit l'information transmise par A_1".
   Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire l'expression de p_n en fonction de n puis sa limite en $+\infty$.

IV] Probabilités conditionnelles : Formule de Bayes

C'est la formule de probabilité des causes : $P_A(B)P(A) = P_B(A)P(B)$
On est parfois également amené à utiliser la formule des probabilités totales pour déterminer $P(B)$.

Exercice de TD : 32

(♡) Dans un établissement, trois classes C_1, C_2 et C_3 dont les effectifs sont respectivement de 44, 33 et 40 élèves ont des taux de réussite respectifs de 1/2, 1/3 et 1/4. Un élève a réussi. Quelle est la probabilité pour qu'il vienne de la deuxième classe ?

Exercice de TD : 33

(♡) Pour se rendre au lycée, un élève a le choix entre quatre itinéraires : A, B, C et D.
La probabilité qu'il a de choisir A (resp. B, C) est 1/3 (resp. 1/4 et 1/12).
La probabilité d'arriver en retard en empruntant A (resp. B, C) est 1/20 (resp. 1/10, 1/5), en empruntant D, il n'est jamais en retard.

1. Quelle est la probabilité que l'élève choisisse l'itinéraire D ?
2. L'élève arrive en retard. Quelle est la probabilité qu'il ait emprunté l'itinéraire C ?

Exercice de TD : 34

(♡) Deux machines M_1 et M_2 produisent respectivement 1000 et 2000 pièces. M_1 produit 5% de pièces défectueuses et M_2 en produit 6%. Quielle est la probabilité qu'un objet défectueux ait été produit par M_1 ?

Exercice de TD : 35

(♡) Un quart d'une population a été vaccinée. Parmi les vaccinés, on compte 1/12 ème de malades. Parmi les malades, on compte 4 non-vaccinés pour un vacciné.
Quelle est la probabilité pour qu'un non-vacciné tombe malade ?

Exercice de TD : 36

(∗) On dispose de n urnes $U_1,\ U_2,\ \dots,\ U_n$ (n désigne un entier naturel non nul).
Pour tout k appartenant à $[\![1, n]\!]$, l'urne U_k contient k^2 boules blanches et $n^2 - k^2$ boules noires.
On choisit une urne, l'urne U_k étant choisie avec la probabilité $a \times k$ pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ (a est une constante réelle) puis on tire une boule de cette urne.
Notations : pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on note A_k l'événement : "l'urne U_k est choisie" et B l'événement "la boule tirée est blanche".

1. Que vaut a ?
2. Quelle est la probabilité que la boule tirée soit blanche ?
3. Sachant que la boule tirée est blanche quelle est la probabilité de l'avoir tirée dans l'urne U_n ?

V] Indépendances d'événements ou d'expériences

Deux événements A et B sont indépendants lorsque $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Exercice de TD : 37

(♡) On suppose que chaque enfant naissant dans une famille est un garçon ou une fille avec la même probabilité $\frac{1}{2}$, indépendemment des autres enfants de la famille.

1. Dans une famille de deux enfants, étudier l'indépendance des deux événements suivants :

— A : "la famille a des enfants des deux sexes"
— B : "la famille a au plus une fille"

2. Même question pour une famille de 3 enfants.
3. Pour quelles valeurs de $n \geq 2$ les événements A et B sont-ils indépendants pour une famille de n enfants ?

Exercice de TD : 38

(♡) On lance un dé n fois ($n \in \mathbb{N}^*$).
Comment choisir n pour que la probabilité p_n d'obtenir au moins un 6, au cours des n lancers, soit supérieure ou égale à $0,95$?

Exercice de TD : 39

(♡♡) Considérons $m+1$ urnes U_0, ..., U_m et supposons que pour tout $k \in [\![0, m]\!]$, l'urne U_k contient k boules bleues et $m-k$ boules rouges. Choisissons une urne et effectuons-y n tirages avec remise.

1. Quelle est la probabilité, sachant que les n tirages ont donné des boules bleues, qu'il en soit de même du $(n+1)$ème tirage ?
2. Vers quoi tend cette probabilité lorsque $m \to +\infty$?